কম্বিনেটরিক্স
গণিতের মজার দুনিয়া

দীপু সরকার

রাফে জায়েদ

জিরো টু ইনফিনিটি : গণিত সিরিজ ০১
কম্বিনেটরিক্স : গণিতের মজার দুনিয়া
দীপু সরকার || রাফে জায়েদ

সিরিজ এডিটর : আবদুল্লাহ আল মাহমুদ
জিরো টু ইনফিনিটি : ২০১৫

প্রকাশক : জিরো টু ইনফিনিটি
৯৫, বিটিআই সেন্ট্রাল প্লাজা, (লিফট - ৭), গ্রীন রোড, ফার্মগেট, ঢাকা – ১২১৫
০১৯১৭৩৩৮৫৯০, ০১৬৭৭১২৩৪১৯
editor@zero2inf.com, zero2inf.com

প্রচ্ছদ : কামরুন নাহার

মূল্যঃ ৫০ টাকা।

BOSTUR GOVIRE [Combinatorics: Amazing World of Mathematics] by Dipu Sarkar & Rafe Zayed. Published in March 2015 by Zero to Infinity. 95, BTI Central Plaza, (7th Floor), Green Road, Farmgate, Dhaka – 1215,
editor@zero2inf.com, zero2inf.com

Price: Tk. 50.00 Only.

উৎসর্গ

ড. মোহাম্মদ কায়কোবাদ, মুহম্মদ জাফর ইকবাল, মুনির হাসান

যাদের স্বপ্নের কারণে স্বপ্ন দেখে পুরো বাংলাদেশ

মুখবন্ধ

গণনা থেকেই শুরু গণিতের। কিন্তু বুদ্ধিমান মানুষ কাঠি রেখে রেখে কিংবা আঁক কষে দাগ দিয়ে যে গোনাগুনি শুরু করেছিল সেখানেই থেমে থাকেনি। এখন যখন আমরা গুণতে চাই বিয়ে বাড়িতে একসাথে কতজন খেতে পারে, আমরা টানা সবগুলো চেয়ার গুণতে থাকি না। যদি দেখি ২০ টা টেবিল আর প্রতি টেবিলে ৬ জন খেতে পারে মাথার ভিতরে কীভাবে যেন 'গুণ' করে ১২০ জন বলে ফেলি আমরা। যুগের পর যুগ চিন্তাশীল মানুষেরা বুদ্ধিদীপ্ত গণনার ব্যাপারটাকে উন্নত করেছেন অনেক, তার ধারা অব্যাহত এখনও। গুণতে গিয়ে অদ্ভুত সব সংখ্যার সাথে পরিচয় হয়েছে আমাদের। আমরা জেনেছি, একটা মানুষকে ১৩ টা অক্ষর ধরিয়ে দিয়ে যদি বলা হয় এদেরকে যত রকমভাবে সাজানো যায় সাজিয়ে লেখ, প্রতিটা লিখতে যদি ৩ সেকেন্ড করেও সময় লাগে তাহলে সবগুলো লিখতে তার সময় লাগবে ৫৯২ বছরেরও বেশি। মাত্র ১৩ টা অক্ষর! আর্কিমিডিস চিন্তা করে গুনে ফেলেছিলেন পৃথিবীতে কতগুলো বালুকণা থাকতে পারে। এই যে গোনাগুনির সব দারুণ বিষয় এগুলো নিয়ে গণিতের একটা সমৃদ্ধ শাখা আছে- যাকে বলে কম্বিনেটরিক্স।

স্নেহভাজন তরুণ লেখক দীপু সরকার আর রাফি জায়েদ মিলে গণিতের এই চমৎকার বিষয়টি আমাদের দেশের মানুষের কাছে তুলে ধরার যে প্রয়াস নিয়েছে সেটা খুবই সুন্দর উদ্যোগ। বিন্যাস সমাবেশ আর গোনাগুনির প্রাথমিক ধারণা থেকে শুরু হয়েছে, এরপর লেখকেরা এগিয়ে গেছেন বাইনোমিয়াল থিওরেমের দিকে। এরপরের চ্যাপ্টার দুটো কম্বিনেটরিক্স এর শুধু নয়, বিশুদ্ধ গণিতেরই খুব জরুরী বিষয়- কীভাবে গাণিতিক চিন্তাকে প্রমাণ করা যাবে, তার দুটো প্রধান উপায় নিয়ে: আরোহ বিধি আর proof by contradiction. কবুতর খোপের নীতি, রিকারশন, সেট থিওরি এগুলোও এসেছে ধাপে ধাপে। অবধারিতভাবেই এসেছে ফিবোনাচি সংখ্যা, স্টার্লিং সংখ্যার দল। কীভাবে ব্যবহার করা যাবে কম্বিনেটরিক্সের জ্ঞান? কিছু সুন্দর সমস্যার সমাধান দেখানো হয়েছে। আর শেষ হয়েছে ভবিষ্যতের আহ্বানে – সমস্যা আর প্রশ্ন রেখে। বইটি অনেক মানুষের কাছে পৌঁছে যাক, লেখকদের পরিশ্রম সার্থক হোক- এই শুভ কামনা রইল।

চমক হাসান
০৮ জানুয়ারি, ২০১৫

লেখকের কথা

আমরা অনেকেই বিন্যাস সমাবেশ এর সকল সমস্যা সূত্র দিয়ে করে ফেলতে পারি কিন্তু ব্যাপারটা ভালোভাবে বুঝতে পারি না। আবার অনেককেই বলতে শুনেছি গণিত অলিম্পিয়াডের জাতীয় পর্যায়ের জন্য কোথা থেকে অনুশীলন করবো? বা এই ধরনের প্রশ্ন কীভাবে সলভ করতে হয়? বাংলা ভাষায় এই ধরনের বইগুলো কোথায় পাবো? তাদের জন্যই আমাদের এই বইটি লেখা।

এখানে ২৫টি প্রশ্ন সলভ করে দেয়া হয়েছে। এছাড়াও ৭৫টি প্রশ্ন তোমাদের অনুশীলনের জন্য রেখে দিয়েছি। তোমাদের উত্তরে, আমাদের আরো কিছু সংযোজনে আমরা এই বইয়ের পরের পর্ব বের করার আশা রাখি। যেহেতু এটা আমদের প্রথম বই তাই ভুল-ত্রুটি থাকা স্বাভাবিক। তার ব্যাপারেও তোমরা আমাদের পরামর্শ দিতে পারো। আর পরের বইতে কোন টপিক হলে ভালো হয় সেটাও বলে দিতে পারো। সবচাইতে বড় কথা আমরা এই বইয়ের পাঠক হিসেবে ধরে নিয়েছি স্কুল কলেজের শিক্ষার্থীদের। তাই এখানে সর্বত্র তুমি কথা ব্যবহার করা হয়েছে। পাঠকদের মধ্যে যারা আমাদের শ্রদ্ধেয় গুরুজন আর শিক্ষক তারা এজন্য আমাদের ক্ষমার দৃষ্টিতে দেখবেন। আর আপনাদের কাছে অনুরোধ অনুশীলনীগুলো ওদের নিজেদের করতে দিন, এতে ওদের চিন্তাশক্তি বাড়বে।

এ বই লেখার পিছনে দুজন মানুষের নাম না বললে নয় একজন মাহমুদ ভাই (আবদুল্লাহ আল মাহমুদ) আর একজন চমক ভাই (চমক হাসান)। তাদের সময়ে অসময়ে ফোন দিয়ে ফেসবুকে বিরক্ত করে জানতে চেয়েছি লেখা কীরকম পরিবর্তন করবো, কী করলে ভালো হয়। তাদের এজন্য অনেক ধন্যবাদ।

বিন্যাস সমাবেশে কখনো ভয় থাকবে না এই প্রত্যাশায় এই বইটা লেখা, যদি তার একটুও সত্য হয় তাহলেই আমাদের এই বই লেখা সার্থক।

সবার ফার্স্ট ডেরিভেটিভ শূন্য আর একই সঙ্গে সেকেন্ড ডেরিভেটিভ নেগেটিভ হোক।

দিপু সরকার
dipusarkar124@gmail.com

লেখকের

আমরা মনের ভুলে যে কাজটা অনেকবার করে থাকি তা হলো কোনো কিছু কতভাবে কী কী দলে করা যাবে তা চিন্তা করে বের করা। যেমন বিশ্বকাপের সময় কয়টা ম্যাচ হবে, জন্মদিনের পর বন্ধুরা খাওয়ানোর কথা বললে কত কম দলে ভাগ করে খাইয়ে দেয়া যাবে, কীভাবে ক্লাসের কোনো বেঞ্চে বসলে স্যার পড়া ধরবে না এসব আর কি! মনের ভুলেই আমরা নানা সময় বিন্যাস সমাবেশ করে ফেলি তাই ব্যাপারটা আরেকটু ভালোভাবে জানা খারাপ না।

মজার ব্যাপার হলো আমরা বিন্যাস বা সমাবেশ খুব একটা বুঝতে চাই না, স্যার দুই একটা অংক করিয়ে দেয় তাতেই প্রাণ যায় যায় অবস্থা! অথচ আমরা জানিও না কি সুন্দর একটা জগত আছে বিন্যাস সমাবেশ এর! আমরা ধরতে চাইলেই সে ধরা দিবে!

বইটার প্রধান উদ্দেশ্য বিন্যাস সমাবেশের গুরুগম্ভীর অংক দেখিয়ে ভয় পাওয়ানো নয়, বরং বিন্যাস সমাবেশ কীভাবে শুরু করতে হয়, কীভাবে এর মজা খুঁজে পেতে হয় তা দেখানো।

অবশ্য ষড়যন্ত্র করে কিছু গোলমেলে ব্যাপারও ঢুকিয়ে দেয়া হয়েছে, গোলমেলে ব্যাপার ছাড়া কি আর অংক জমে বলো?

এই বইটা পড়ে ক্ষুদে গণিতবিদরা যদি বিন্যাস সমাবেশকে আর ভয় না পায়, তাহলেই আমাদের এ ছোট্ট চেষ্টা সার্থক হবে।

রাফে মোঃ আবু জায়েদ
rafe.zayed@gmail.com

সূচিপত্র

একটুখানি শুরু

মনে করা যাক, অনন্ত জলিল ঢাকা থেকে আমেরিকা যাবে। কীভাবে যাবে? প্লেন ছাড়া উপায় কী? কিন্তু যখন কাজটি জলিল ভাই করছে, তাই অসম্ভব অনেক কিছুই ঘটতে পারে।

আবার যেখানে জলিল ভাই আছে, সেখানে বর্ষা আপু না হলে চলে? কিন্তু আপু বসে আছে সিঙ্গাপুরে (শপিং করতে!)। তাই ভাইয়া ঠিক করলো, প্রথমে আপুর সাথে দেখা করবে, পরে আমেরিকা যাবে।

এবার ধরা যাক, ঢাকা হতে সিঙ্গাপুরে যাবার তিনটি উপায় আছে জলিলের কাছে, নৌকা (!), রিক্সা (!!) আর সাইকেল (!!!) (ধরলাম আর কি)। আবার ধরা যাক, সিঙ্গাপুর হতে আমেরিকায় যাওয়ার উপায় আছে দুইটি, হাতি (!) আর হেলিকপ্টার (আবার ধরলাম!)। এবার আমি যদি জিজ্ঞেস করি, জলিল কত উপায়ে সিঙ্গাপুর হয়ে আমেরিকাতে যেতে পারবে?

ঝামেলা না করে চলো দেখে ফেলা যাক,

<table>
<tr><td rowspan="3">ঢাকা</td><td>নৌকা</td><td rowspan="3">সিঙ্গাপুর</td><td>হাতি</td><td rowspan="3">আমেরিকা</td></tr>
<tr><td>রিক্সা</td><td rowspan="2">হেলিকপ্টার</td></tr>
<tr><td>সাইকেল</td></tr>
</table>

খেয়াল করে দেখ, জলিল এভাবে যেতে পারে,
(1) নৌকা -------------------------→ হাতি
(2) নৌকা -------------------------→ হেলিকপ্টার
(3) রিক্সা --------------------------→ হাতি
(4) রিক্সা -------------------------→ হেলিকপ্টার
(5) সাইকেল ----------------------→ হাতি
(6) সাইকেল ----------------------→ হেলিকপ্টার

অর্থাৎ জলিল মোট 6 উপায়ে সিঙ্গাপুর হয়ে আমেরিকায় যেতে পারে।

আচ্ছা যদি বলা হতো, সিঙ্গাপুর যাবার উপায় 4টি আর আমেরিকা যাবার উপায় 5টি, তাহলে কয়টি উপায়ে আমেরিকা যেতে পারতো?

খুব সহজ। উপরে দেখ, সিঙ্গাপুরের একটি রাস্তা দিয়ে আমেরিকাতে যাওয়ার উপায় 2টি। তাহলে 3টি রাস্তা দিয়ে মোট উপায় হবে $3 \times 2 = 6$ টি।

তাহলে 4 আর 5 এর বেলায় উত্তর কয়টি হবে! 20 টি! তাই না!

উপরের একটি ব্যাপার খেয়াল করেছ? উপরে দুইটি নির্ভরশীল ঘটনার কথা বলা হয়েছে। এক্ষেত্রে আমরা দুইটি গুণ করে দিয়েছি। এখানে তিনটি, চারটি বা পাঁচটি ঘটনাও থাকতে পারে। সেক্ষেত্রে সব কটি গুণ করে দিতে হবে।

আচ্ছা, প্রশ্নটি যদি একটু ভিন্নভাবে করতাম?

এবার বর্ষা আপুকে ছেড়ে দিয়ে বলতাম অনন্ত ভাইয়া ঢাকা থেকে আমেরিকা নদীপথে দুইভাবে আর আকাশপথে তিনভাবে যেতে পারে। তাহলে সে মোট কত উপায়ে আমেরিকা যেতে পারবে?

এবার কি গুণ হবে?

অবশ্যই না। কারণ এখানে নদীপথে যাওয়া তো আর আকাশপথের উপর নির্ভরশীল না। আর এজন্য গুণের ব্যাপারটি খাটেনি। তাই মোট উপায় $2 + 3 = 5$.

আগেরটির সাথে এটার তফাৎ কী বল তো। আগেরটিতে আমেরিকা যাওয়ার পথটি সিঙ্গাপুর যাওয়ার উপর নির্ভরশীল ছিল। কিন্তু এবারেরটায় কিন্তু ঐ রকম কিছু নেই।

তাহলে একটি খুব গুরুত্বপূর্ণ ব্যাপার খেয়াল রাখবে,

(1) নির্ভরশীল ঘটনা হলে গুণ হবে।
(2) স্বাধীন ঘটনা হলে যোগ হবে।

বিন্যাসের শুরু

বিন্যাস মানে হচ্ছে সাজানো (মেকাপ টাইপ কিছু না)। সহজ ভাষায় কিছু জিনিসকে কত উপায়ে সাজানো যায় সেটাই হচ্ছে বিন্যাস।

ধরা যাক, তুমি তোমার দশ বন্ধুকে এক লাইনে দাঁড় করাবে। বন্ধুদের মধ্যে কিছু হিংসুটে, প্রথমে দাঁড়াতে চায়, কিছু আছে ভালো, যেখানে বলবে সেখানেই বসে পড়বে। তো বিশাল এক বিশৃঙ্খল ব্যাপার। বন্ধুরা মিলে হইচই করছে আর জায়গা বদল করছে। এখন তোমাকে কেউ যদি প্রশ্ন করে এই দশ জনকে তুমি কত উপায়ে এক লাইনে দাঁড় করাতে পারবে তবে কী উত্তর দিবে?

বিষয়টি একদমই সহজ। আচ্ছা, বলতো প্রথম স্থানে মোট দাঁড়ানোর কয়টি উপায় আছে? অবশ্যই 10টি উপায় কারণ ঐ 10 জনের কাউকে না কাউকে ঐ জায়গায় ঘাড় ধরে বসানো যাবে, তাই না?

ধরা যাক, শুরুতে একজনকে বসানো হলো। এবার দ্বিতীয় স্থানে কত উপায়ে কাউকে দাঁড় করানো যেতে পারে?

অবশ্যই 9 উপায়ে। কারণ প্রথম স্থানে তো একজন বসে গেছে। তাই বাকি 9 বেচারার কাউকে না কাউকে বসানো যাবে।

এবার যদি বলি প্রথম দুইটি স্থানে কত উপায়ে এদের দাঁড় করানো যাবে?

যারা বুদ্ধিমান তারা বুঝে গেছ নিশ্চয়ই। এখানে দ্বিতীয় স্থানে কে না কে বসবে তা প্রথম স্থানে কে বসছে তার উপর নির্ভর করে। কারণ প্রথম স্থানে আবুল বসলে পরেরটিতে নিশ্চয়ই ও বসতে পারবে না। কাবুল বা বাবুল বা অন্য কেউ বসবে।

অর্থাৎ এটি নির্ভরশীল ঘটনা। তাহলে কী হবে? হ্যাঁ, গুণ। অর্থাৎ 10×9 বা 90 ভাবে প্রথম দুইটি স্থানে বন্ধুদের দাঁড়া করানো যাবে।

তাহলে কী এটি বলা যায়, যে কোনো 10টি জিনিস থেকে 2টি জিনিস নিয়ে সাজানো বা বিন্যাস করার উপায় 10×9 বা 90?
এ জিনিসটাকে আমরা এভাবে লিখি $^{10}p_2 = 10 \times 9 = 90$.
এখানে p বলতে বিন্যাস বুঝানো হচ্ছে। এর উপরেরটি দিয়ে বুঝাচ্ছে কয়টি জিনিস থেকে নিচ্ছি আর নিচের সংখ্যাটি দিয়ে বুঝাচ্ছে ঐ জিনিসগুলোর কয়টি নিচ্ছি।

যাক, এবার যদি প্রথম তিনটি স্থানে দাঁড়ানোর উপায় বলা হয় তাহলে কত হবে?
হ্যাঁ, $10 \times 9 \times 8 = 720$ উপায়ে। তাহলে দশটি স্থানে কত উপায়ে হবে?
$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ উপায়ে।
এটিকে আবার আমরা 10! ও বলতে পারি। এখানে ! চিহ্নটিকে বলা হয় ফ্যাকটোরিয়াল চিহ্ন। (অনেকে আবার বিস্ময় চিহ্ন ভেবে চোখ বড় বড় করে বলে 10। আসলে এটি এখানে বিস্ময় চিহ্ন না)
তাহলে বল তো 5 জন বন্ধু থাকলে মোট কত উপায়ে সাজানো যেত?
হ্যাঁ, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ভাবে।
আর যদি বলা হতো 5 জন থেকে তিন জনকে নিয়ে কতভাবে?
তখন উত্তর হতো, $5 \times 4 \times 3 = 60$ ভাবে।
আচ্ছা দাঁড়াও, এটাকেও ফ্যাকটোরিয়াল চিহ্ন দিয়ে লিখে ফেললে কেমন হয়?

দেখ, $5 \times 4 \times 3 = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{5!}{2!}$.

কি সুন্দর তাই না যেহেতু তিনটি জিনিস বেছে নিতে বলছে, তাই 5 থেকে শুরু করে এক এক কমিয়ে তিনটি সংখ্যা নিয়ে গুণ করতে হয়েছে। 5! করতে আর দুইটি সংখ্যা লাগবে। তাই উপরে ঐ দুইটি গুণ করে দেয়া হয়েছে আর তার শাস্তি হিসাবে নিচে 2! দিয়ে ভাগ করে দেয়া হয়েছে।

যদি nটি জিনিস হতে pটি জিনিস নিতে বলতো, তবে আমরা n হতে এক এক করে কমিয়ে মোট rটি জিনিস নিতাম, আর n! করতে (n - r)টি সংখ্যা লাগে। তাই এভাবে গুণ করে নিচে r! দিয়ে ভাগ করে দিতাম।

অর্থাৎ কী দাড়াল -

$^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

তাহলে এবার একটি গাণিতিক সমস্যা করা যাক, কি বলো? ধরা যাক, লম্বু সাহেব তার স্যুটকেসের পাসওয়ার্ড ভুলে গেছেন। তার শুধু মনে আছে পাসওয়ার্ডগুলোতে যে সংখ্যাগুলো আছে তা হলো 3, 5, 1, 2. এবার বলো তো তাকে সর্বোচ্চ কতবার চেষ্টা করতে হতে পারে তালাটি খুলতে?

খুব সহজ। চারটি সংখ্যা আছে। এদেরকে চারটি স্থানে 4! ভাবে সাজানো যাবে।

আমি জানি, তোমাদের মনে একটি প্রশ্ন কুটকুট করছে। নাম্বারগুলি তো দুইবারও থাকতে পারে, যেমন 3351, 2233, 2223। আমরা যা করলাম তা তো প্রত্যেকটি সংখ্যা একবার করে নিয়ে। যদি সংখ্যাগুলি যেকোনো সংখ্যকবার থাকতে পারে তাহলে কী উপায়?

বুঝো নি? আচ্ছা ধরা যাক তোমাকে বলা হলো, তিন অংকের কয়টি সংখ্যা আছে বের কর। খুব সোজা, তাই না। 100 থেকে 999 মাত্র 900টি সংখ্যা।

এবার আসা যাক বিন্যাস দিয়ে কীভাবে করা যায়। মোট ডিজিট আছে দশটি, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. এদের মধ্যে থেকে তিনটি নিয়ে করে নিয়ে কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়? অবশ্যই $^{10}p_{3} = 120$.

অনেক কম। আসলে কিন্তু আরো কম হবে। আচ্ছা বলতো 012, 013 এগুলো তো দুই অংকের সংখ্যা, এগুলোও তো আমরা উপরে হিসাব করে ফেলেছি। তাই না?

তাহলে উপরের হিসাবে শুরুতে 0 রেখে কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায় হিসাব করা যাক। ধরলাম,, শুরুতে 0 আছে। তাহলে বাকি দুইটি ঘরকে বাকি 9টি ডিজিট দিয়ে $^{9}p_{2} = 36$ ভাবে পূরণ করা যাবে।

তাহলে আমাদের হিসাবে সংখ্যা 120 - 36 = 84 টি। কিন্তু আমরা শুরুতেই দেখলাম সংখ্যা 900 টি। কীভাবে এ সমস্যা দূর করা যায়?

আচ্ছা বলতো আমাদের উপরের হিসাবে কি 111, 112, 221 এ সংখ্যাগুলো ছিল? অবশ্যই না, কারণ আমরা সবগুলো সংখ্যা একবার আছে, হিসাবেই বের করেছি। তাহলে কী করা যায়?

কিংবা এ তিন অংকের সংখ্যাগুলোর প্রথম স্থানটি কতভাবে পূরণ করা যায়?
অবশ্যই 9 ভাবে (কারণ শুরুতে 0 বসবে না)।

এবার, দ্বিতীয় স্থানটি? 9 ভাবে? না, কারণ দ্বিতীয় স্থানে ঐ দশটি সংখ্যার যে কোনোটাই বসতে পারে।

তৃতীয়টা? এটিও 10 ভাবে!

তাহলে মোট কতভাবে? $9 \times 10 \times 10 = 900$ ভাবে। কি মিললো?

আরেকটি উদাহরণ দেখা যাক। ধর, আবুলের বিয়ের আংটি পরার খুব শখ! তার মোট আটটি বিয়ের আংটি আছে। তার এক হাতের পাঁচটি আঙ্গুলে কতভাবে এগুলো পরতে পারবে?

দেখ, প্রথম আংটিটি কোন কোন আঙ্গুলে যেতে পারে? স্বভাবতই আটটি আঙ্গুলের যে কোনোটিতে।

অর্থাৎ প্রথম আংটির সাজানোর উপায় পাঁচটি।
এবার দ্বিতীয় আংটির পালা। এটি কয় উপায়ে বসতে পারে?
এটাও আটটি উপায়ে। কারণ আমরা তো প্রথম আংটির উপরে বা নিচে একে বসিয়ে ফেলতে পারি। তাহলে এর জন্যও পাঁচটি উপায়।

তৃতীয়? এটিও পাঁচটি উপায়ে। কারণ প্রথম দুই আঙ্গুলে বসানো আংটির উপরে নিচে বসাতে পারি আমরা আর বাকি তিনটি আঙ্গুলে।
তাহলে মোট উপায় কতটি?
$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^8$ টি।
আমি জানি তোমাদের মধ্যে যারা জিনিসটি বুঝে ফেলেছ, তারা মোটামুটি একটি নতুন প্রশ্নের জন্য তৈরি। ধরলাম, সব জিনিস এক নয়, কিন্তু সব জিনিসের মধ্যে কিছু কিছু এবার কিছু কিছু সংখ্যক বার আছে।

যেমন ধরা যাক, আমাদের কাছে চারটি বর্ণ আছে - a, a, b, c.
অর্থাৎ দুইটি a, একটি b আর একটি c. এবার কীভাবে এদের সাজাতে পারবো?
আমি জানি তোমরা তাড়াতাড়ি করে অনেকে বলে বসবে $4! = 24$ ভাবে। আসলেই কী তাই?

চলো ব্যাপারটি দেখা যাক।

এখানে দুইটি a আছে। তাই খেয়াল কর, আমরা কিন্তু কিছু কিছু জিনিস একই রকম পেয়ে যাবো। তাহলে কী করা যায়?

প্রথমেই আমরা ধরে নিলাম এদেরকে y ভাবে সাজানো যায়। আর আমাদের কাছে আবার দুইটি a আছে। এদের আবার নিজেদের ভিতর যদি 2! ভাবে সাজানো যায় তবেই তো মূল বিন্যাসটি পেয়ে যাব।

অর্থাৎ, $y \times 2! = 24$
বা, $y = \frac{24}{2!} = 12$ ভাবে।
এবার এটাকে একটি সূত্র আকারে লিখে ফেলা যাক।
যদি x টি জিনিস থাকে যার মধ্যে a সংখ্যক এক জাতীয়, b সংখ্যক আরেক জাতীয়,... হয়, তবে এদেরকে নিজেদের মাঝে $\frac{x!}{a!\,b!\ldots}$ ভাবে সাজানো যায়।

তাহলে বলো তো আমাদের প্রিয় দেশ বাংলাদেশের বর্ণগুলি নিয়ে কয়টি বিন্যাস হতে পারে?

দেখ Bangladesh এ মোট দশটি বর্ণ। এদের মধ্যে দুইটি বর্ণ একই। তাহলে মোট সাজানোর উপায়, $\frac{10!}{2!}$.

এবার কিছু গাণিতিক সমস্যা সমাধান করা যাক।

ধরা যাক, তোমাকে পাঁচটি সংখ্যা 1, 2, 3, 5, 0 দেয়া হলো। এ অংকগুলি দিয়ে কয়টি চার অংকের অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা বানাতে পারবো?
আমরা জানি, শুরুতে শূন্য থাকতে পারবে না। তাহলে তো সমস্যা।

আচ্ছা দাঁড়াও, যেহেতু বিজোড় সংখ্যা, তাই শেষে 3 বা 5 থাকবে। প্রথমে ধরলাম, শেষে 3 আছে।
তাহলে শুরুর তিনটি ঘরে বাকি চারটি অংক বসানো যায় $^4p_3$ বা 24 ভাবে।
আবার শুরুতে 0 আর শেষে 3 রেখে বাকি দুইটি ঘর তিনটি সংখ্যা দিয়ে $^3p_2$ বা 6 ভাবে পূরণ করা যায়।

তাহলে আসলে সংখ্যা পাওয়া যাবে 24 – 6 =18টি।
শেষে 5 রেখেও একইভাবে পাওয়া যাবে।
তাহলে মোট উপায়, 18 × 2 = 36 টি।

আরেকটি সমস্যা দেখা যাক, ধর তোমাকে 4টি অংক দিলাম 5, 1, 2, 3. এগুলো একবার ব্যবহার করে যে চার অংকের সংখ্যাগুলো পাওয়া যাবে তাদের অংকগুলোর যোগফল কত?

আমরা যদি এভাবে দেখি,

			1

শেষে 1 রেখে বাকি ঘরগুলো কত উপায়ে পূরণ করা যায়? অবশ্যই 3! = 6 ভাবে।

এবার 1 কে তিন নাম্বার ঘরে রাখা যাক। এবার কয়ভাবে? এখনো ছয়ভাবে। কিন্তু এখন কি আর এর মান 1 আছে? না, এবার এর মান 10 হয়ে গেছে।

আমার মনে হয় তোমরা বুঝতে পেরেছ এরপর কী করবো। এবার 1 কে একঘর সামনে রাখি, এবারও 6 ভাবে সাজানো যাবে আর 1 এর মান হয়ে যাবে 100.

তাহলে সবকটি এক এর যোগফল কত হবে?
6 × (1 + 10 + 100 + 1000)
এবার বলো সবকটি 2 এর যোগফল কত?
6 × 2 × (1 + 10 + 100 + 1000)
এভাবে সবকটি সংখ্যার ক্ষেত্রে বের করে মোট যোগফল 6 × (1 + 2 + 3 + 5) × (1 + 10 + 100 + 1000)

এবার আরেকটি সমস্যা দেখা যাক, আবুল সাহেবের a আর b এ দুইটি বর্ণ অনেক পছন্দ। এক প্রতিযোগিতায় তাকে ইংরেজি ছাব্বিশটি বর্ণ থেকে 5টি করে বর্ণ নিয়ে

শব্দ বানাতে বলো হলো। সে করলো কি, প্রত্যেকটি শব্দে a আর b ব্যবহার করে ফেললো। তাহলে বলো তো, সে কয়টি শব্দ কম বানিয়েছে?

যদি আবুল সাহেব সবকটি বর্ণ নিতো তাহলে কয়টি শব্দ পাওয়া যেত?
হ্যাঁ, $^{26}p_5$ টি বর্ণ।
এবার বলো তো a b কে কতভাবে ঐ পাঁচটি স্থানে সাজানো যাবে?
অবশ্যই $^{5}p_2$ ভাবে।
এবার সে a b সবসময় নিয়েছে। আর বাকি চব্বিশটি থেকে তিনটি বর্ণ নিয়েছে।
এখন চব্বিশটি বর্ণ হতে তিনটি বর্ণ নিয়ে সাজানোর উপায় হচ্ছে, $^{24}p_3$ টি।
তাহলে মোট সাজানোর উপায় $^{24}p_3 \times {}^{5}p_2$ ভাবে।
এবার বলোতো কয়টি শব্দ কম বানিয়েছে?

এবার, একটু বাস্তব সমস্যায় আসা যাক। আচ্ছা, ধর তোমার ক্লাসে মেয়ে আছে বা ছেলে আছে। তুমি যদি মেয়ে হও তবে নিশ্চয়ই ছেলের পাশে বসতে চাইবে! আর ছেলে হলে মেয়ের পাশে। এবার ধরা যাক, তোমার ক্লাসে একটি বেঞ্চে 3টি মেয়ে আর 5টি ছেলে আছে। মেয়েগুলা ছেলের পাশে বসতে চায়, কিন্তু অন্য কোনো মেয়ের পাশে না (হিংসা আরকি!)। অর্থাৎ পাশাপাশি কোনো মেয়ে বসতে চায় না। এটি কতভাবে সম্ভব?

প্রথমে এক কাজ করি। ছেলেদের কতভাবে সাজানো যায় বের করে ফেলি।
যেহেতু 5টি ছেলে, তাই এদের 5! ভাবে সাজানো যাবে।
যাক, সাজানো হলো। এবার আমরা এক কাজ করি। এ ছেলেদের ফাঁকে ফাঁকে হিংসুটে মেয়েদের ঢুকিয়ে দেই। তাহলেই তো কেউ কারো পাশে বসবে না!

আচ্ছা বলো তো, ছেলেদের ভিতর কটি জায়গা আছে? দেখা যাক,

নীল বক্সগুলি যদি ছেলে আর তীর চিহ্ন মেয়ে বুঝায়, তবে কয়টি জায়গা আছে?
হ্যাঁ, 6টি।
এখন, এ ছয় জায়গায় তিন মেয়েকে কতভাবে সাজানো যায়?
অবশ্যই, $^{6}p_3$ ভাবে।
তাহলে মোট সাজানোর উপায়, 5! $\times$ 6p3 টি।

আবার, একটু বর্ণ সাজাসাজির খেলায় ফিরে আসি! Alphabet এ শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যাবে যেন স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে?

স্বরবর্ণ আছে কয়টি? A, a, e মানে তিনটি। এক কাজ করা যাক, এরা যেহেতু একত্রে থাকবে তাই এদের একটি বস্তায় ভরে ফেলি। তাহলে বলো তো, এবার কয়টি বর্ণ পেলাম? বস্তা, l, p, h, b, t বা 6টি। এবার এদের কতভাবে সাজানো যায়? 6! বা 720 ভাবে।

এবার বস্তার বর্ণগুলির ব্যাপারে আসি। আমরা বলোছি এরা একত্রে থাকবে। কিন্তু নিজেদের ভিতর তো জায়গা বদলা বদলি করতেই পারে। এ কাজটি কতভাবে করা যায়? $\frac{3!}{2!}$ ভাবে বা 3 ভাবে। এখানে যেহেতু দুইটি a তাই 2! দিয়ে ভাগ করা হয়েছে। তাহলে মোট উপায়, $3 \times 720 = 2160$ টি।

এবার একটি প্রশ্ন, যদি বলতাম একত্রে না রেখে কতভাবে সাজানো যায়, তাহলে কী হবে? চিন্তা কর, বের করতে পারবে।

আরেকটি নতুন প্রশ্ন করা যাক, এ alphabet শব্দটির স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে কতভাবে সাজানো যায়?

বুঝলে না? আচ্ছা বলো তো, এখানে প্রথম স্বরবর্ণ কোনটি? a. পরেরটি a. আর শেষেরটি e. সাজানোর সময় আমরা এ ক্রম ঠিক রাখবো, অর্থাৎ e কে আগে লিখতে পারবো না।

অর্থাৎ, কেবল যদি স্বরবর্ণগুলোকে পরিবর্তন করি -
Alphabet
Alphebat
Alphabet
Alphebat
Elphabat
Elphabat

এ 6টি বিন্যাসের বদলে আমরা কেবল একটি বিন্যাস পাই। এবার একটি কাজ কর তো, সবকটি স্বরবর্ণকে একটি স্বরবর্ণ ধর। ধরলাম, স্বরবর্ণগুলো এবার a, a, e না বরং a, a, a.

এবার বিন্যাসগুলি দাঁড়ায় -
Alphabat
Alphabat
Alphabat
Alphabat
Alphabat
Alphabat

এবারও কি একই ফলাফল পেলাম? না, 6টির জায়গায় একটি। এবার বলো, একই জিনিস বারবার থাকলে বিন্যাস করতে হলে কী করতে হবে?

ঐ জিনিস কয়বার আছে তার ফ্যাকটোরিয়াল দিয়ে ভাগ করতে হবে।
তাহলে সাজানোর উপায় হচ্ছে, $\frac{8!}{3!}$.
আচ্ছা, এবার আরেকটি নতুন প্রশ্ন করা যাক। যদি বলা হয়, এ alphabet শব্দটির স্বরবর্ণ আর ব্যাঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে কতভাবে সাজানো যায়, তবে কীভাবে করবে?

তার আগে দেখা যাক, আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করা মানে কী?
দেখ, a আছে 1 নাম্বার স্থানে, আরেকটি a 5 নং এ আর e 7 নং এ। সাজানোর সময় এরা এ স্থান বাদে বাকি কোথাও বসবে না। ব্যাঞ্জনবর্ণগুলোও তাই।

তাহলে কতভাবে?
3টি স্থানে তিনটি স্বরবর্ণ 3! ভাবে সাজানো যায়। বাকি 5টি বর্ণ 5টি স্থানে 5! ভাবে সাজানো যায়। তাহলে মোট উপায়, 3! × 5!

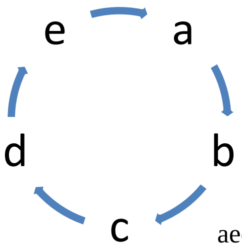
চক্রবিন্যাসঃ

ধরা যাক, তোমরা 5 জন বন্ধু একটি গোলটেবিলে বসে আছ। এখন একটু পরে তোমাদের ভালো লাগলো না, তাই তোমরা জায়গা বদল করলে। কিন্তু না, একটু পর আবার মারামারি। তাই তোমরা আবার জায়গা বদল করলে। বলো তো, এভাবে কতবার বদলা-বদলি করা যাবে?

আমি জানি, তোমরা বলছো খুব সোজা। যেহেতু 5 জন বন্ধু, তাই তাদেরকে 5! বা 120 ভাবে সাজানো যাবে!

সত্যিই কি তাই?

আচ্ছা, ধরা যাক, তোমরা 5 বন্ধু হচ্ছো, a, b, c, d, e . এবার একটি ব্যাপার দেখ। এবার এদের একটু টেবিলে বসিয়ে দেখি,



এবার লাখ টাকা দামের প্রশ্ন। বলো তো এ বিন্যাসটিকে কীভাবে লেখা যায়? তোমরা অনেকেই মাথা চুলকাবে! কারণ, শুরু করবো কোন দিক দিয়ে।

আসলে এটি যেদিক থেকে খুশি পড়া যায়। কেউ e থেকে শুরু করে বলতে পারে edcba বা eabcd. আবার কেউ a দিয়ে শুরু করে বলতে পারে আরে কি বল, বিন্যাসতো, aedcb। আবার ঘুরিয়েও তো আরেকভাবে বলা যায়?

তাহলে তো সব কয়টি বিন্যাস একই দাঁড়ায়। তাহলে বলো তো, এখন কি আর 5! টি বিন্যাস ঠিক থাকবে?

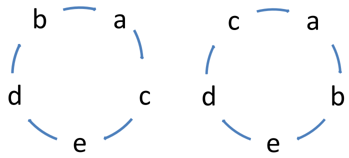
অবশ্যই কিছু কমে যাবে, তাই না?
তাহলে এ হিসাবটি কীভাবে করা যায় বল তো।
ধর একটি বিন্যাস হচ্ছে, A, b, c, d, e.
এখন দেখ, আমরা একই বিন্যাস b থেকে শুরু করতে পারি। সেক্ষেত্রে শুরুতে b লিখে বাকিগুলো লিখবো আর শেষে a লিখবো। মানে আমরা চক্রাকারে এ বিন্যাসটি চালাতে পারি আর সব ক্ষেত্রে একই মান আসবে।

তাহলে কীভাবে করা যায়?

আচ্ছা একটি কাজ করলে কেমন হয়?

আমরা যে কোনো একজনকে একটি নির্দিষ্ট চেয়ারে বসিয়ে রাখি, আর বাকি লোকদের ওলট পালট করে সাজাই। সেক্ষেত্রে কি এক বিন্যাস থাকবে?

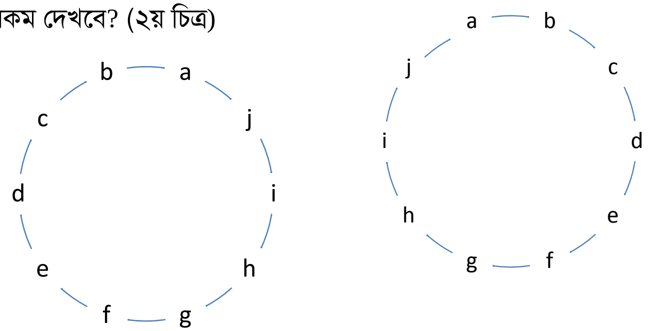
অবশ্যই না। যেমন ধরা যাক, আগে a এর বাম পাশে b আর ডানপাশে c ছিল। এবার ওলট পালটের ফলে ধর ডানপাশে b আর বাম পাশে c চলে আসলো। তখন কি আরেকটি বিন্যাস পাবো না?



তাহলে কী হলো? বিন্যাস কত হবে?
a বাদে বাকি চার জনের সাজানোর উপায় হলো (5-1)! বা 4!
তাহলে যতজন মানুষ তার চেয়ে এক কম এর ফ্যাকটোরিয়াল-ই হবে নির্ণেয় বিন্যাস।

এবার একটি ছোট্ট সমস্যা। ধরা যাক, দশটি ভিন্ন ভিন্ন মুক্তা দেয়া আছে। এগুলো দিয়ে একটি মালা তৈরি করতে হবে। কতভাবে সম্ভব?

আমি জানি, সবাই এবার বলবে কেন 9! ভাবে। আস, এবার একটু দেখা যাক। আচ্ছা বলা হলো তোমরা মালাকে উচু করে ধর তো। ধর, তোমার সামনে একজন দাঁড়িয়ে মালাটাকে এরকম দেখছে (১ম চিত্র), এবার একই মালা একজন পিছন থেকে দেখলে কীরকম দেখবে? (২য় চিত্র)



একদম উলটা দেখবে তাই না? কিন্তু দুইটি বিন্যাসই তো একই। এরকম যতগুলি বিন্যাস হবে সবগুলো আসলে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। একভাগ হচ্ছে সামনে থেকে আরেকভাগ পেছন থেকে। কিন্তু একই বিন্যাস।

আবার মোট বিন্যাস আমরা জানি, 9! তাই আসল বিন্যাস হবে এর অর্ধেক। এখন কেউ কেউ প্রশ্ন তুলতে পারো, আগেরটাতে কেন ভাগ করলাম না? আসলে আগেরটায় কি দুই দিক দিয়ে দেখা যায়? কেউ তো কেবল টেবিলের উপর থেকে দেখতে পারবে।

নিচ দিয়ে না। কিন্তু, মালার ক্ষেত্রে তো সামনে পিছে দুই দিক দিয়েই দেখা যায়। তাই দুই দিয়ে ভাগ হবে।

সমাবেশ

আমরা এতক্ষণ বিন্যাস নিয়ে বেশ কিছুক্ষণ আলোচনা করলাম। কে আগে যাবে কে পিছনে আসবে, কে ডানে যাবে কে বামে আসবে এসব। এবার আসো একটু অন্যরকম চিন্তা করা যাক।

ধর তোমরা মাঠে ফুটবল খেলবে, কিন্তু গিয়ে দেখলে 33টি ছেলে মুখ গোমড়া করে দাঁড়িয়ে আছে। সবাই ফুটবল খেলতে চায়, কী করা যায়? যাক, তিনটি দল বানিয়ে ফেললে, এর ভিতর দুইটি দুইটি দল করে খেলবে, আর এরপর ঠিক করবে কার জেতার সংখ্যা বেশি বা কম।

এবার কেউ যদি বলে কয়টি ম্যাচ হবে, তাহলে কী বলবে?

আমি জানি একটু আগে তোমরা বিন্যাস শিখে এসেছ, তাই হুট করে বলবে কেন, তিনটি দল থেকে দুইটি দল কতভাবে সাজাতে পারবো?

${}^{3}P_{2} = 6$ ভাবে। বিষয়টি কি ঠিক? একটু ভেবে দেখা যাক।

আচ্ছা দলগুলোর নাম দিলাম a, b, c. তাহলে বলো তো কয়টি খেলা হবে?
a b
b c
c a.
মানে দাঁড়াচ্ছে গিয়ে তিনটি। তাহলে ছয়টি আসলো কীভাবে?
আমরা যেহেতু বিন্যাস করেছি তারমানে আমরা এ তিনটিও গুনেছি,
b a
c b
a c
কিন্তু এ তিনটি আর আগের তিনটি তো এক কথাই, নাকি! কারণ a আর b এর সাথে ম্যাচ হওয়া আর b আর a এর সাথে ম্যাচ হওয়া তো একই কথা।

এবার তাহলে সমাবেশ জিনিসটি কী বোঝার কথা। ‘সমাবেশ’ মানে হচ্ছে বাছাই করা, কে আগে পরে থাকলো সেটি কোনো ব্যাপার না। একভাবে বাছাই করতে পারলেই হলো।

আমরা বিন্যাসের জন্য কিছু সূত্র দাঁড় করিয়েছি, সমাবেশের জন্য দাঁড় না করালে চলে! আসো, করে ফেলি। ধরা যাক, আমাদের কাছে nটি জিনিস আছে। এর ভিতর থেকে rটি জিনিস কতভাবে বাছাই করতে পারবো?

আচ্ছা ধরে নিলাম আমরা ${}^{n}C_{r}$ ভাবে বাছাই করতে পারবো (এটি বিন্যাসের একটি চিহ্ন। এটি দিয়েই সমাবেশকে প্রকাশ করে।)

এবার এ বাছাই করা জিনিসগুলোকে নিজেদের ভিতর সাজাই, বলোতো কতভাবে সাজানো যাবে? যেহেতু r সংখ্যক জিনিস আছে, তাই এদের r! ভাবে সাজানো যাবে, তাহলে আমরা মোট কতগুলো সাজানো পেলাম?

$^nc_r \times r!$

এবার বলো, যদি আমরা n টি জিনিস হতে r টি জিনিস নিয়ে বাছাই করতাম, তবে কি একই ব্যাপারটি ঘটতো না?

অবশ্যই। তাহলে

$^nc_r \times r! = {}^np_r$

So, $^nc_r \times r! = \frac{n!}{(n-r)!}$

Or, $^nc_r = \frac{n!}{r!x(n-r)!}$

দেখলে, আমরা কি সুন্দর একটি সূত্র দাঁড় করিয়ে ফেললাম!

এবার একটি ছোট্ট সমস্যা। ধরা যাক, তোমার দশ জন বন্ধু আছে, আর তুমি তাদের দাওয়াত দিতে চাও। কিন্তু সবাইকে দিতে হবে এমন না, হয়তো কাউকে দিলে, কাউকে দিলে না, আবার হয়তো সবাইকেই দিলে। কতভাবে দিতে পারবে?

ধরা যাক দশ জন বন্ধুর নাম দিলাম, 1, 2, 3, ...10.
এবার তুমি কীভাবে দাওয়াত দিতে পারো?
ধরা যাক তুমি দিলে 1, 2, 4, 5, 6, 9 নাম্বারকে।
আবার ধর না কমিয়ে দিবো, এখন তুমি দিলে 1, 4, 2 কে।
আবার ধর, ভেবে বসলে সবাইকে দিবো।
প্রশ্ন হলো এটি কতভাবে সম্ভব?

চিন্তার ব্যাপার তাই না?

আচ্ছা, ধরা যাক তুমি 1 নাম্বারকে দিবে বা দিবে না, কতভাবে এটি সম্ভব? দুই ভাবে, হয় তুমি তাকে দাওয়াত দিবে, নতুবা দিবে না।

মানে 1 নাম্বার এর ক্ষেত্রে মোট দুইটি উপায় সম্ভব। 2 এর ক্ষেত্রে? একই ব্যাপার। এভাবে 10 জন এর ক্ষেত্রে একই ব্যাপার হবে।
এবার বলো তো, এ ঘটনাগুলো কি স্বাধীন? অবশ্যই, কারণ একটির সাথে আরেকটির কোনো সম্পর্ক নেই। তাহলে মোট উপায়?

সবগুলো গুণ! মানে $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{10}$.

দাঁড়াও দাঁড়াও, আমরা একটি ব্যাপার এড়িয়ে গেছি, 1 এর বেলায় বললাম, দিবো বা দিবো না, 2 এর বেলাও একই। ব্যাপারটি আমরা আগের মতো ছক একে চিন্তা করি।

1 2 3 4.......................

একটি ব্যাপার খেয়াল কর, নিচের লাইনটি দেখছো? সব দিবো না দিবো না হয়ে গেছে। এটি কি সম্ভব? কোনো বন্ধুকে দাওয়াত না দিলে লোকে কী বলবে!

তাহলে আমরা যা গুণলাম তা থেকে একটি বাদ যাবে।
মানে মোট উপায় হবে, $2^{10}-1$ টা।
আচ্ছা, বলো তো তোমরা তো পড়ে এসেছ কোনো সেটের উপসেট সংখ্যা 2^n, কিন্তু বলতে পারবে কেন এটি হলো? যেমন তিনটি পরপর ফুটবল খেলা হবে, রেজাল্ট কীভাবে আসতে পারে?

একটি ফুটবল খেলার রেজাল্ট কী কী হতে পারে? জয়-পরাজয় বা ড্র, পরেরটির একই। তারপরেরটিরও! তাহলে মোট উপায়, $3 \times 3 \times 3 = 27$. এরকম অনেক উদাহরণ দেয়া যায়, আর ঐ দিকে না যাই।

এখন আমরা একটি ভিন্ন ব্যপার দেখি। ধর, তুমি তোমার কাছে 10টি ফুটবল, 9টি টেনিস বল আর 6টি জাম্বুরা আছে। এখন কথা হলো, তুমি কতভাবে এগুলো তোমার বোনকে দিতে পারবে?

সহজ, 10টি ফুটবল তাহলে মোট 11টি উপায় দেয়ার। (কেন বলবো না :D)
আর বাকি দুইটির জন্য 10 ভাবে এবং 7 ভাবে।
তাহলে মোট উপায় $10 \times 11 \times 7 -1$ (কীভাবে?)
আচ্ছা এবার একটি কথা বলে ফেলা যাক, 250000 এর উৎপাদক সংখ্যা কত?

ভয় পেলে? দাঁড়াও দাঁড়াও গুণ করে বের করতে হবে না।
$250000 = 5^2 \times 10^4 = 5^6 \times 2^4$

উৎপাদক বানাতে হলে তো এ গুণফলের ভিতর থেকেই সংখ্যা নিতে হবে। যেমন দুইটি পাঁচ আর একটি দুই নিয়ে বললাম, হ্যাঁ একটি উৎপাদক হচ্ছে $5 \times 5 \times 2 = 50$.

কথা হলো কতভাবে নিতে পারি? সোজা। এখানে 6টি 5 আর চারটি দুই আছে। তাহলে বাছতে পারবো 7×5 বা 35 ভাবে।

কিন্তু আমরা মৌলিক উৎপাদক বের করে নিলাম কেন? আর এক বিয়োগ করলাম না কেন? চেষ্টা কর, পেয়ে যাবে উত্তর।

আচ্ছা এবার যদি সংখ্যাটি এরকম থাকতো, $5^6 \times 2^4 \times 3 \times 5$। তাহলে কী করা যেত?

এটাও সহজ ব্যাপার। আমরা প্রথম দুইটির জন্য মোট 7×5টি উপায় পাচ্ছি, আর পরের দুইটির বেলায় ঠিক আগের মতো। হয় তিন নিব অথবা নিব না, মানে এর জন্য দুইটি উপায়, 5 এর বেলাতেও একই ব্যাপার।

তাহলে মোট উপায়, $7 \times 5 \times 2 \times 2$. যদি আরো এরকম ছাড়া ছাড়া জিনিস থাকতো তখন?

এবার একটু ভাগাভাগির অংকে আসি। ধর তোমার কাছে 5টি কলম আর 3টি খাতা আছে। তোমার দুই বন্ধু আসছে, তুমি এদের এমনভাবে ভাগ করে দিবে যেন এক বন্ধু তিনটি জিনিস আরেক বন্ধু পাঁচটি জিনিস পায়, কতভাবে এ ভাগাভাগি সম্ভব?

মোট জিনিস আছে কয়টি? 8টি। এ 8টি জিনিস হতে 5টি জিনিস কতভাবে বাছাই করা যায়? অবশ্যই $^{8}c_5$ ভাবে। তাহলে কি বাকিগুলো বাছাই করার দরকার আছে? কারণ পাঁচটি বাছাই করলে তো বাকি তিনটি আপনা-আপনি বাছাই করা হয়ে যায়, তাই না?

এখন আমরা একটি সাধারণ সূত্র লিখে ফেলি। যদি (m + n) সংখ্যক বস্তু থাকে আর তাদের m and n সংখ্যকভাবে দুই দলে ভাগ করতে হয়, তবে মোট ভাগ সংখ্যা হবে $^{m+n}c_m$. এটাকে লেখা যায় $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$.

কেন লেখা যায় তোমরা কারণটি বের করে ফেল।

সমাবেশ আসলে খুব দরকারি একটি জিনিস আমাদের জীবনে। আমরা এ অধ্যায়ে খুব কঠিন কোনো সমাবেশ এ যাবো না। দুই একটি সহজ জিনিস দেখে ফেলব শুধু। ধরা যাক তোমাকে একটি 20 ভুজ দিয়ে বলা হলো, এর কর্ণের সংখ্যা কত?

20 ভুজ বানাতে হলে কয়টি বিন্দু যোগ করা লাগে, অবশ্যই 20টি। আবার আমরা জানি, যে কোনো দুইটি বিন্দু যোগ করে দিলেই আমরা একটি রেখা পেয়ে যাবো।

তাহলে এ 20টি বিন্দু হতে মোট $^{20}c_2$ বা 190টি রেখা পাওয়া সম্ভব। এখন এর ভিতর 20টি হবে এ ভুজ এর 20 বাহু, আর বাকিগুলি হবে এর কর্ণ। তাহলে মোট কর্ণ 190 - 20 = 170টি

আমরা অধ্যায়টি শুরু করেছি মূলত বিন্যাস আর সমাবেশ কী তা বোঝাতে। আর ফাঁকে ফাঁকে দুই একটি টুকটাক উদাহরণ। আশা করি, কিছু হলেও বুঝেছ, এর পরে আমরা আরেকটু কঠিন ব্যাপার-স্যাপার নিয়ে আলোচনা করবো, কি বলো?

আপাতত আরেকটি গাণিতিক সমস্যা দিয়ে শেষ করা যাক –
4টি ছেলে আর 3টি মেয়ে হতে কয়টি দল বানানো যায়, যাতে কমপক্ষে একটি করে ছেলে আর মেয়ে থাকে আর দলটার সদস্য হয় 4 জন?

আমরা নিচের টেবিলের মতো করে বিষয়টিকে দেখতে পারি,

সমাবেশ	ছেলে	মেয়ে
1	1	3
2	2	2
3	3	1

1 এর বেলায় সমাবেশ হবে, $^{4}c_1 \times {}^{3}c_3 = 4$
2 এর বেলায় $^{4}c_2 \times {}^{3}c_2 = 18$, 3 এর বেলায় $^{4}c_3 \times {}^{3}c_1 = 12$
তাহলে মোট দল করা সম্ভব 4 + 12 + 18 = 34 টি।

প্যাসকেলের ত্রিভুজ এবং বাইনোমিয়াল

সমাবেশের কথা বলতে গেলেই বাইনোমিয়ালের কথা উঠে আসে। বাইনোমিয়াল মানে হচ্ছে দুই পদ যুক্ত রাশি, যেমন ax , by এরকম।

আমরা ছোট বেলায় $(x + y)^2$ এর সূত্র গড় গড় করে বলে দিতাম। আচ্ছা এবার যদি একটু বড় কোনো সংখ্যা থাকে, তবে কীভাবে বের করব?

যেমন ধরা যাক বলা হলো, $(x + y)^{100}$ এটাকে ভাঙ্গিয়ে লিখতে?

এক কাজ করা যেতে পারে, একে একবার একবার করে বসে বসে গুণ করা। কিন্তু এটি ভীষণ ঝামেলার ব্যাপার। এর চেয়ে সহজ উপায়েও এটি বের করা যায়, অবশ্যই সমাবেশের ধারণা দিয়ে। জিনিসটাকে আমরা এভাবেও লিখতে পারি,

$(x + y) \times (x + y) \times (x + y) \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

এখন একটু চিন্তা করে বের কর তো, এ গুণফলের প্রতি পদের মাত্রা কত হবে? অবশ্যই 100 হবে। (কেন?)

এবার আমরা সবগুলো উৎপাদক থেকে কেবল x নিয়ে গুণ করি, তাহলে গুণফল কত হবে? অবশ্যই x^n.

এবার, আমরা যে কোনো একটি উৎপাদক থেকে x নেই, আর বাকি $(100 - 1) = 99$ টি থেকে y নিয়ে গুণ করি, এখন, 100 টি উৎপাদক হতে একটি x নেবার উৎপাদক কে $^{100}c_1$ ভাবে বাছাই করা যায়। তাহলে গুণফল দাঁড়াবে, $^{100}c_1 y^{100-1}\, x$

পরে কী করবো? যেকোনো দুটি হতে x নিবো আর বাকি 98টি হতে y নিবো। তাহলে গুণফল দাঁড়াবে, $^{100}c_2 y^{100-2}\, x^2$. এভাবে গুণ করতে করতে আগাতে থাকলে আমরা পাবো, $(x + y)^{100} = x^{100} + {}^nc_1\, x^{99}\, y + {}^nc_2\, x^{98}\, y^2 + \ldots\ldots\ldots. + y^{100}$ (ঘুরিয়ে লিখলাম আর কি!)

আচ্ছা, এবার যদি 100 এর জায়গায় n থাকতো তবে কী দাঁড়াত?

$(x + y)^n = x^n + {}^nc_1\, x^{n-1}\, y + {}^nc_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y^n$

আমরা এতদিন সমাবেশের চিহ্ন কেবল সমাবেশের অংক করতেই ব্যবহার করতাম, এখন দেখলে কি সুন্দর একটি সম্পর্ক বের হলো! এ কারণে এ চিহ্নগুলোকে বলা হয় binomial coefficient আর এভাবেও লেখা হয়, $^nc_r = ({}_r^n)$

এবার প্যাসকেলের ত্রিভুজ নিয়ে কিছু আলাপ করা যাক।

আমরা যদি বাইনোমিয়াল কো এফিসিয়েন্টগুলোকে এমনভাবে লিখি,

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

এভাবে লিখতে থাকি তবে কেমন হয়? আচ্ছা, ব্যাপারটি মনে হয় ধরতে পারছ না, তাহলে এটাকে ভেঙ্গে লেখা যাক,

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

ত্রিভুজটি বানানো খুব সহজ, যে কোনো দুইটি পদের ফাঁকের নিচে যে জায়গাটি আছে, এর ভিতরের যোগফলটি বসালেই হলো। এখন প্রশ্ন হলো এটি কী কাজে লাগে?

আমরা $(x + y)$ এর পাওয়ার বাড়াতে থাকলে এর পদের যে সহগগুলো হতে থাকে টি লিখে ফেলি।

$(x + y)^0 =$ 1

$(x + y)^1 =$ 1 1

$(x +y)^2 =$ 1 2 1

$(x + y)^3 =$ 1 3 3 1

কি মিলল?

এ ত্রিভুজ থেকে ইচ্ছে করলে আমরা যেকোনো পাওয়ারকে ভাঙ্গতে পারি।

যেমন ধরা যাক, $(x + y)^6$ কে ভাঙ্গতে বলা হলো

আমাদের প্রথম কাজ হবে, x এর সর্বোচ্চ পাওয়ার আর y এর সর্বনিম্ন পাওয়ার থেকে লেখা শুরু করা। এরপর x এর পাওয়ার এক এক করে কমানো আর y এর পাওয়ার এক এক করে বাড়ানো। সব শেষে প্যাসকেল এর ত্রিভুজ হতে (6 +1) বা 7 নাম্বার সারির পদগুলো এক এক পদের পর বসিয়ে দেয়া।

আসো, প্যাসকেলের ত্রিভুজটা আরেকবার লিখে ফেলি,

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

এবার এ পদগুলিকে সহগগুলির পাশে বসিয়ে দেবার পালা।

$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$

আচ্ছা প্যাসকেleর ত্রিভুজ থেকে এটি বোঝা যাচ্ছে না যে, $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ এ জিনিসটি সব সময় সত্য হবে?

অবশ্যই হবে, কিন্তু কেন হবে সেটা বের করা তোমাদের হাতে ছেড়ে দিলাম। আর দেখতেই পাচ্ছো, n এর মান যখন বিজোড় হয় তখন আমরা জোড় সংখ্যক কো-এফিসিয়েন্ট পাচ্ছি আর এর প্রথম অর্ধেক আর বাকি অর্ধেক সমান।

আর জোড় হলে মাঝে একটি পদ আসে আর তার দুই পাশেরগুলো সমান হতে থাকে। এটি কিন্তু খুব গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম, খেয়াল রাখতে হবে।

এবার কিছু বাইনোমিয়াল কোএফিসিয়েন্ট এর সুত্র দেয়া যাক,

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(b) $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$;

(c) $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$;

(d) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$;

(e) $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$;

(f) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$;

(g) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$;

(h) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$;

(i) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$;

(j) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$;

(k) $\binom{n}{k}$ **is divisible by** n **if** n **is prime and** $1 < k < n-1$.

এখানে আর প্রমাণ দিলাম না, একটু চেষ্টা করলেই বের করতে পারবে। ও, এ প্রসঙ্গে দুইটি চিহ্নের কথা বলা যাক,

$\lceil\rceil \lfloor\rfloor$ এ দুইটি চিহ্নের নাম হলো যথাক্রমে সিলিং এবং ফ্লোর।

কোনো সংখ্যার সিলিং মানে ঐ সংখ্যার পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যা, অবশ্য সংখ্যাটি নিজেই পূর্ণ সংখ্যা হলে সিলিং হবে ঐ সংখ্যা নিজেই।

যেমন, $\lceil 4.234 \rceil = 5$ এবং $\lceil 4 \rceil = 4$

তাহলে পরেরটি কী? এটি হলো ফ্লোর, কোনো সংখ্যার ফ্লোর ঐ সংখ্যার আগের পূর্ণ সংখ্যা, আর নিজে পূর্ণ সংখ্যা হলে ঐ সংখ্যা নিজেই।

যেমন, $\lfloor 4,123 \rfloor = 4$.

আসলে বাইনোমিয়াল অনেক ক্ষেত্রেই খুব কাজের জিনিস, একটু পরেই আমরা এর ব্যবহার দেখতে পাবো।

আরোহ বিধি (সিড়ি ধরে শেখা)

আমরা গাণিতিক সমস্যা কীভাবে সমাধান করি বলো তো? গাণিতিক সমস্যা শুরুতে দেখি, সূত্র বসাই, চিন্তা করি, ব্যাস শেষ! (কেউ কেউ কলম চিবোয়, উদাস চোখে বাইরে তাকায়, তারপর আস্তে করে খাতা জমা দিয়ে চলে আসে!)

যাই হোক, আচ্ছা অংক করার আগেই কি তোমরা রেজাল্ট কী হবে তা নিয়ে একটি অনুমান করে ফেলতে পার?

আমি জানি, তোমরা ভাবছ কীভাবে? অংক করেই বের করতে পারি না, আবার না করে! সত্যি কি তাই?

আসো, দেখা যাক। 1 হতে শুরু করে প্রথম 30000 বিজোড় পদের যোগফল কত বল তো?

দাঁড়াও দাঁড়াও, একবারে যোগ করতে পারবে না। খেয়াল করবে, খুব ভালোভাবে -

1
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

কিছু কি দেখছ? যে কয়টি পদ নিচ্ছি তার বর্গ হয়ে যাচ্ছে যোগফলটি।

তাহলে কি আমরা মোটামোটি উত্তরটি কত হবে অনুমান করতে পারি? আমরা তো মাত্র চারটি পদ নিয়ে করছি। বাকিগুলোর বেলায়ও যে হবে তার নিশ্চয়তা কি?

তাহলে এবার আমরা একটি নতুন সমস্যায় পড়লাম। অবশ্য ব্যাপার না, খুব সহজে আমরা দেখাতে পারবো। কীভাবে?

আচ্ছা তার আগে দেখা যাক আমাদের কী প্রমাণ করতে হবে?

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. + 2n - 1 = n^2$

এবার এক কাজ করা যাক, আমরা ধরে নিলাম, n এর কোনো একটি মান m এর জন্য জিনিসটি সত্য হবে। মানে দাঁড়াচ্ছে,

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2m - 1 = m^2$

আচ্ছা বল তো, m + 1 এর জন্যও কি সত্য হবে? ঝামেলা না করে দেখি আসো।

এক কাজ করি, উপরের সমীকরণের উভয় পাশে $2m + 1$ যোগ করে দেই। কারণ n এর মান $m + 1$ হলে $2n - 1$ এর মান হয় $2m + 1$.

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. + 2m + 1 = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$

যাক বাবা, $m + 1$ এর বেলাতেও তো দেখি সত্য হয়ে গেলো!

আচ্ছা, এবার একটি মজার জিনিস দেখি। আমরা ধরে নিয়েছি কোনো একটি m এর জন্য জিনিসটি সত্য হবে। আমরা তো জানি না যে এই মানটি কত। $m = 5$ ধরলে কী দাঁড়ায়?

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$, না, সত্য হয় দেখছি!

আচ্ছা, 5 এর জন্য তো সত্য হলো, 6 এর বেলায় কি হবে?

অবশ্যই, কারণ আমরা আগেই দেখেছি $m + 1$ এর জন্যও সত্য।

এবার! 6 এর জন্য তো সত্য, তাহলে কি 7 এর বেলায় সত্য হবে না?

অবশ্যই হবে। কারণ আমরা যদি বলি না m এর মান এখন 6 ধরব, তাহলে তো 7 এর বেলাতেও খাটবে।

তোমরা নিশ্চয়ই বুঝে ফেলেছ এখন আমরা কি বলতে চাইছি! এইভাবে এক এক করে করে m এর সব মান এর জন্য সত্য হবে!

তাহলে আমরা কী পেলাম? 5 থেকে শুরু করে সকল মানের জন্য ধারাটি সত্য হবে।

এবার ছোট্ট সমস্যা। আমরা তো চাইছি এক হতে শুরু করে যেন ধারাটি সত্য হয়।

কোনো ব্যাপার না। m এর মান 1 হলে কি সত্য? অবশ্যই, তাহলে আর কি! হয়েই গেল, তাই না?

এই পদ্ধতিটির নাম হচ্ছে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি বা induction. শুনে অবাক হবে বড় বড় গণিতবিদরাও এই পদ্ধতিটি হরহামেশাই ব্যবহার করে। তুমি নিজেই তো দেখলে কত সহজে অনুমান দিয়ে প্রমাণটি দাঁড় করিয়ে ফেললাম।

তোমরা হয়তো এখনো বিশ্বাস করতে পারছ না কীভাবে এই পদ্ধতিটি এত কাজে লাগে। দেখা যাক তাহলে।

$1! < 2^1$ $\quad$ $2! < 2^2$ $\quad$ $3! < 2^3$ $\quad$ $4! > 2^4$ $\quad$ $5! > 2^5$

দেখতেই পাচ্ছ, যখন 3 এর চেয়ে বড় কিছু নিচ্ছি, তখন এর মান বড় হয়ে যাচ্ছে, এটি কি সবসময়ই খাটবে? অর্থাৎ আমাদের প্রমাণ করতে হবে, $n! > 2^n$ যখন n এর মান 3 এর চেয়ে বড় হবে।

আগের মতো ধরি n এর একটি মান m এর জন্য বিষয়টি সত্য। মানে, $m! > 2^m$

এবার দেখাতে হবে, $m + 1$ এর জন্যও সত্য হবে। এক কাজ করি, উভয় দিকে $m+1$ দিয়ে গুণ করে দিই।

তাহলে, $(m + 1)! > 2^m x (m + 1)$

এবার বল তো, 2^{m+1} আর $2^m (m + 1)$ এর ভিতর কোনটি বড়?

দেখ, $2^{m+1} = 2^m.2$

$2^m (m + 1) > 2^m.2$

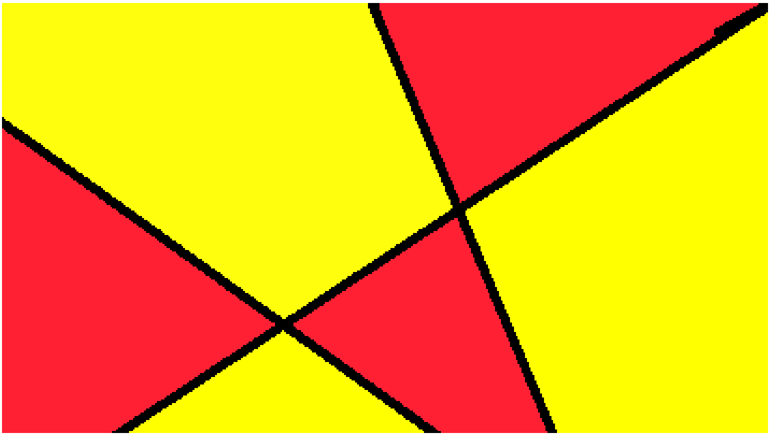
তাহলে তো, $(m + 1)! > 2^{m+1}$ হবে, তাই না?

এবার, আমাদের ঠিক করতে হবে আমরা m এর মান কত হতে শুরু হলে সত্য হবে। উপরে দেখতেই পাচ্ছ, 4 হতে শুরু হলে সত্য। তাহলে তো বাকিগুলোর জন্যও সত্য হবে, তাই না?

আরেকটু মজার সমস্যায় যাওয়া যাক –

ধর, তুমি একটি কাগজের উপর ইচ্ছেমতো কয়েকটি লাইন টানলে। তাহলে তুমি কয়েকটি এলাকা পাবে তাই না? এবার প্রমাণ করে ফেল, এই এলাকাগুলিকে এমনভাবে রং করা যাবে, যেন পাশাপাশি দুইটি এলাকার রং একই না হয়।

আচ্ছা বুঝছো না? চলো ছবিটা দেখি –



দেখলে, পাশাপাশি একই রং কি দেখা যাচ্ছে? অবশ্যই না! কিন্তু ব্যাপারটা সব কিছুর বেলায় যে সত্য হবে এটি কীভাবে বুঝবো?

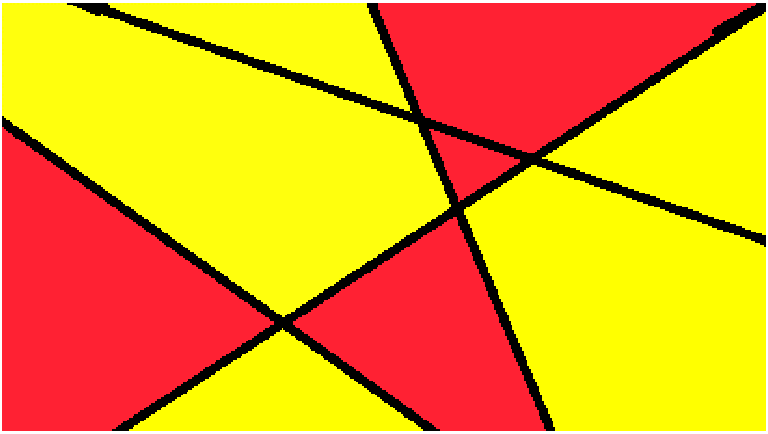
এজন্য আমরা ব্যাপারটিকে P(n) দিয়ে প্রকাশ করি, অর্থাৎ একটি লাইন টানলে p(1), দুইটি টানলে p(2) এভাবে।

তবে p(1) কি সত্য? অবশ্যই।

এবার ধরলাম p(n) সত্য। আর p(n) এর ছবিটি উপরের মটো। এবার যদি প্রমাণ করতে পারি p(n + 1) সত্য তাহলেই কেল্লা ফতে!

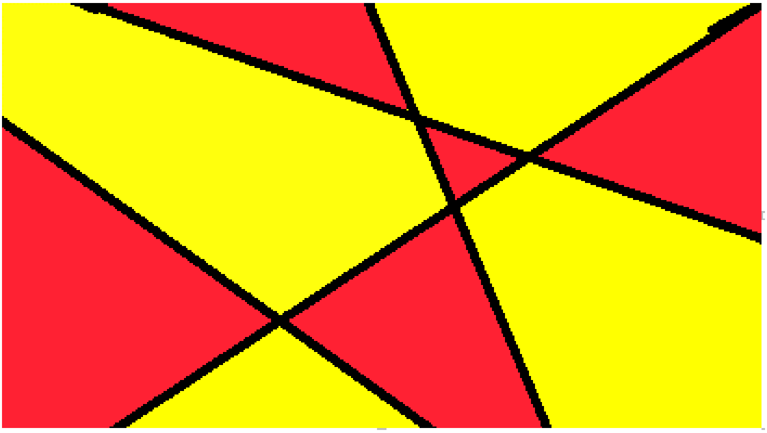
এখন p(n + 1) এর জন্য কী করা লাগবে? আরেকটি লাইন টানা লাগবে, তাই না?

আসো টেনে ফেলা যাক –



কোথাও এক জায়গায় সমস্যা আছে তাই ন? নতুন লাইনের নিচের রংগুলি ঠিক আছে, কিন্তু উপরের লাইনগুলিতে সমস্যা। (আচ্ছা বলো তো নিচের দিকেরগুলি কেন ঠিক আছে?)

এক কাজ করো, উপরের রংগুলি কেবল বদলে দাও।



কি, এবার সত্য হলো? তার মানে n এর সকল মানের জন্যই এটি সত্য হবে!

সুপারম্যান আরোহ

আমরা এতক্ষণ যে আরোহ নিয়ে আলোচনা করলাম, তা অনেক সময় একটু কষ্টকর হয়ে যায়। কারণটি কি জানো? অনেক সময় দেখা যায় p(n+1) যে সত্য হবে তা বের করতে মাথার ঘাম পায়ে ফেলতে হয়। তখন আমরা একটু শক্তিশালী আরোহ ব্যবহার করি। এটাই হচ্ছে strong induction (সুপারম্যান আরোহ)!

চল দেখা যাক জিনিসটি আসলে কী। আমরা এবারও p(n+1) যে সত্য বের করবো, কিন্তু একটু অন্য কায়দায়।

আমরা আগে শুরুতে কোনো একটি মান নিয়ে বলছি না যে এটি সত্য হবে। যেমন p(1) সত্য। এবার আমরা কয়েকটি মান নিয়ে বলবো এগুলো সত্য। কেন এই জিনিসটি করলাম একটু পরই বুঝতে পারবে।

ধরলাম p(a), p(a+1), p(a+2), …………………, p(b) সব কয়টিই সত্য।

এখন আমাদের তো প্রমাণ করতে হবে p(n+1) ও সত্য। তবে এবার আমরা আগের মতো না ধরে একটু অন্যভাবে ধরবো।

ধরবো, p(i) সত্য। যেখানে i হচ্ছে b হতে n এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা। এবার শুধু আগের মতো প্রমাণ করে ফেলবো p(n+1) ও সত্য হবে। তাহলেই বাজিমাত! এভাবে n এর সকল মানের জন্য প্রমাণ হয়ে যাবে এই বক্তব্যটি সত্য।

(কেন হবে? একটু ভাবো আমরা আগে কেন বলেছি যে, p(n) এবং p(n+1) সত্য হলে সকল মানের জন্য সত্য হবে। তাহলেই বের করতে পারবে)।

যা হোক, তোমরা যদি কথার আগা মাথা কিছুই না বোঝো সমস্যা নেই। দেরী না করে আমরা একটি উদাহরণ দেখে ফেলি।

প্রমাণ করতে হবে যে, 1 এর চেয়ে বড় যে কোনো সংখ্যা কমপক্ষে একটি প্রাইম দিয়ে বিভাজ্য হবেই।

আমরা ধরে নিলাম, কোনো সংখ্যা n প্রাইম দ্বারা বিভাজ্য এই কথাটি হচ্ছে p(n)। আমাদের প্রমাণ করতে হবে, n এর সকল মানের জন্য p(n) সত্য।

আমি জানি কেউ কেউ খাতা কলম নিয়ে বসে পড়েছ। প্রথমে p(2) দেখাবে সত্য। এরপর বলবে P(n) সত্য আর তারপর p(n+1) যে সত্য এটি দেখাবে। চেষ্টা করে দেখ তো পারো কিনা!

তোমরা করতে করতে আমরা এর মধ্যে আরেকভাবে প্রমাণ করে ফেলি।

ভালো করে দেখ p(2) যে সত্য তা এমনিই বোঝা যায়। এবার আমরা ধরলাম, i হলো এমন একটি নাম্বার, যেটি 2 হতে n এর মধ্যে। আর এরকম সকল i এর জন্য p(i) সত্য হবে।

আর আমাদের শুধু একটি কাজ বাকি। দেখাতে হবে p(n+1) ও সত্য।

আচ্ছা, n+1 যদি মৌলিক সংখ্যা হয় তবে তো হয়েই গেল। যদি না হয় তবে ধরলাম, n + 1 = a.b

যেহেতু, a, b দুইটাই হচ্ছে n+1 এর গুণনীয়ক, তাই তারা অবশ্যই n+1 হতে ছোট।

মানে, $1 < a < n+1$.

কিন্তু a তো অবশ্যই 2 হতে বড় হবে। আবার a, n+1 হতে ছোট। তাহলে এটি n হতেও ছোট হবে। (একটু ভাব!)

তাহলে $2 < a < n$.

আচ্ছা বলো তো, আমরা i কে কী ধরেছিলাম? 2 থেকে n এর ভিতরের কোনো সংখ্যা। তাহলে a কি i এর ভিতর পড়েনি?

ভালো করে দেখ এটি কিন্তু প্রাইম দ্বারা বিভাজ্য। তাহলে a ও প্রাইম দ্বারা বিভাজ্য হবে, তাই না?

দাঁড়াও দাঁড়াও। a যদি প্রাইম দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে n+1 কি হবে না? অবশ্যই!

আরে, প্রমাণ হয়ে গেলো দেখি! এবার চল আরেকটি সমস্যা দেখি –

ধরা যাক, একটি ধারা হচ্ছে, $a_{m+n} + a_{m-n} = 0.5\,(a_{2m} + a_{2n})$

যেখানে, $m > n$, $a_0 = 0, a_2 = 4, a_{2m} = 4a_m$.

দেখাতে হবে যে, $a_n = n^2$

তো ধরে নিলাম এই ঘটনাটি হচ্ছে p(n). তাহলে p(0) কি সত্য?

অবশ্যই, কারণ $a_0 = 0 = 0^2$

এবার ধরলাম p(k) সত্য। আর u হচ্ছে 0 হতে k এর ভিতর কোনো সংখ্যা। ধরলাম, u এর সকল মানের জন্যই p(u) সত্য।

এবার! ধরলাম m = u, n = 1,

তাহলে, $a_{u+1} + a_{u-1} = 0.5(a_{2u} + a_2)$

$= 0.5(4a_u + 4)$ $[a_{2m} = 4a_m, a_2 = 4]$

$= 2a_u + 2$

$= 2u^2 + 2$ [কারণ u হচ্ছে 0 হতে k এর ভিতরে]

সুতরাং $a_{u+1} = 2u^2 + 2 - a_{u-1}$

$= 2u^2 + 2 - (u-1)^2$ [কারণ u - 1হচ্ছে 0 হতে k এর ভিতরে]

$= (u+1)^2$

আর কী, প্রমাণ হয়ে গেল!

খুব মজার একটি খেলা দিয়ে এই অধ্যায়টি শেষ করা যাক। ধর, দুই বান্ধবী ইকরি আর টুকটুকি বসে আছে। এমন সময় তারা একটি খেলা বের করলো। ইকরি শুরুতে একটি মাসের নাম আর তারিখ বলবে। ধরা যাক, ও বললো 24 মে। এখন টুকটুকি কে এর থেকে বাড়িয়ে মাস বা তারিখ বলতে হবে। যেমন ও ইচ্ছে করলে বলতে পারে, 25 মে বা 24 আগস্ট। অর্থাৎ একবারে মাস বা তারিখ দুইটির কেবল একটি বাড়াতে পারবে, একসাথে দুইটি না। এখন যে বলবে 31 ডিসেম্বর সে জিতবে। কে এই খেলায় জিতবে?

আচ্ছা, ইকরি যদি শুরুতে বলতো 30 নভেম্বর তাহলে কি ও জিতে যেত না? অবশ্যই, কারণ তখন টুকটুকির সামনে দুইটি পথ, হয় 30 ডিসেম্বর বা 31 নভেম্বর বলা। এই দুই বেলাতেই তো ইকরি জিতে যাবে। কারণ ও তখন বলবে 31 ডিসেম্বর বা 31 ডিসেম্বর!

এবার আসা যাক ইকরি যদি বলতো 29 অক্টোবর, তাহলে কি জেতা যেত? অবশ্যই কারণ তখন টুকটুকি বলতো 29 নভেম্বর বা 30 অক্টোবর। আর তখনি ইকরি বলে ফেলত 30 নভেম্বর। এভাবে আগের মতো করে ও জিতে যেত!

কিন্তু ইকরি যদি 28 সেপ্টেম্বর দিয়ে শুরু করটো, তবে কী হতো? টুকটুকি বলতো 29 সেপ্টেম্বর বা 28 অক্টোবর। আর তারপর ইকরি কী বলতো বল তো!

তাহলে মোটামোটি বুঝে গেলাম যে ইকরি জিতে যাবে। এবার আসো প্রমাণ করে ফেলি ব্যাপারটি।

ধরলাম (13 - n, 32 - n) এই দুটো দিয়ে মাস আর তারিখ বোঝায় আর এই বাক্যটি সত্য কি মিথ্যা তা বের করতে হবে (এটি কিন্তু ইকরির বলা বাক্য)।

n = 1 হলে বাক্যটি দাঁড়ায় (12, 31) ইকরি এটি বললে তো জিতেই গেলো।

আমাদের দেখাতে হবে, n এর যে কোনো মান k - 1এর জন্য ইকরি জিতলে n = k এর জন্যও জিতবে।(অবাক লাগছে একটু ভাবতো?)

এবার ধরলাম, n = m এর জন্য ইকরি জিতবে। এখানে m হচ্ছে 1 হতে শুরু করে k – 1 পর্যন্ত সকল সংখ্যা। অর্থাৎ (13 - m, 32 - m) একটি জেতার মুভ।

এখন কী করবো? দেখাবো n = Kএর জন্যও ইকরি জিতবে। n = k হলে ইকরি বলবে (13 - k, 32 - k)।

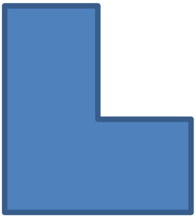
তখন যদি টুকটুকি মাস বাড়িয়ে বলে (13 - m, 32 - k) (মাস বেড়ে গেল কেন? আরে m তো k এর চেয়ে ছোট তাই) তবে এবার ইকরি বলবে (13 - m, 32 - m) অর্থাৎ দিন বাড়িয়ে দিবে। আর এই মুভটায় আসলেই ও জিতবে যা আমরা আগেই বলেছি।

কিন্তু যদি টুকটুকি মাস না বাড়িয়ে দিন বাড়ায় অর্থাৎ (13 - k, 32 - m) করে ফেলে তবে ইকরিও পরেরবার মাস বাড়িয়ে ফেলবে অর্থাৎ ও বানাবে (13 - m, 32 - m).

এবারও ইকরি জিতে যাবে!

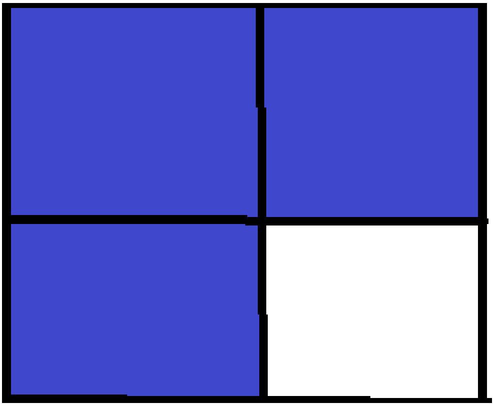
তাহলে কী দাড়ালো? সকল n এর জন্যই ইকরি জিতে যাবে যা আমরা আগেই অনুমান করেছিলাম।

অনেক প্যাঁচানো হলো, এবার একটি মজার জিনিস দেখে আসি। এল শেপ টাইল চেন? তিনটি বর্গাকার টাইল যারা L শেপ থাকে। জিনিসটি অনকটি এরকম –



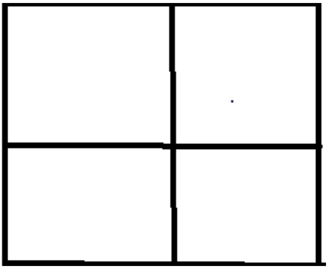
ধর, একটি কাগজে 2^n টি অনুভূমিক, এবং একই সংখ্যক উল্লম্ব দাগ কেটে 2^{2n} সংখ্যক বর্গ তৈরি করা হলো। এবার একটি বর্গ কে তুলে ফেলা হলো। এখন ঝটপট প্রমাণ কর যে n এর যেকোনো মানের জন্য বাকি বর্গগুলোকে এই L সেইপ দিয়ে ঢেকে ফেলা যাবে। ধরলাম এই পুরণ করার ব্যাপারটি হচ্ছে p(n). যেখানে n, 2 এর ঘাত বুঝাচ্ছে।

তাহলে n এর মান 1 হলে কি সত্য? অবশ্যই, কারণ? চলো দেখি।



ধরলাম n এর কোনো একটি মান m এর জন্য p(m) সত্য। এবার p(m+1) সত্য প্রমাণ করলেই তো হয়ে গেল। সুপারম্যান আরোহের মতো করে আমরা ধরে নেই আমাদের এই ফাঁকা স্থানটি যেখানে খুশি সেখানে রেখে p(m) সত্য বানাতে পারি।

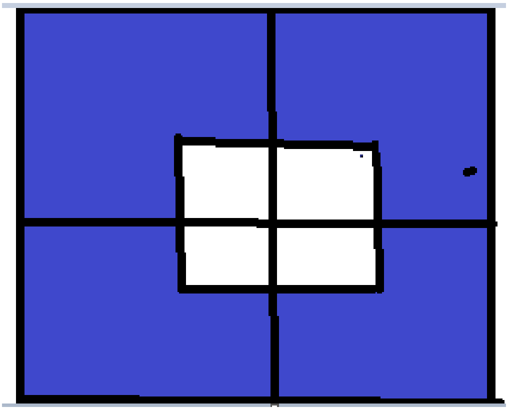
এবার আমরা এক কাজ করি। 2^{n+1} এই ক্ষেত্রের ঠিক মাঝ বরাবর দুইট দাগ টেনে দেই। উপর থেকে নিচে আর বাম থেকে ডানে।



আচ্ছা এবার বলো তো, প্রতিটি ভাগের দৈর্ঘ্য কত হবে? অবশ্যই 2^n. প্রতিটি ভাগকে কি এল শেপ দিয়ে এমনভাবে ঢেকে দেয়া যাবে না যেন একটি বর্গ বাকি থাকে? অবশ্যই কারণ আমরা তো একটু আগে ওটাই ধরলাম।

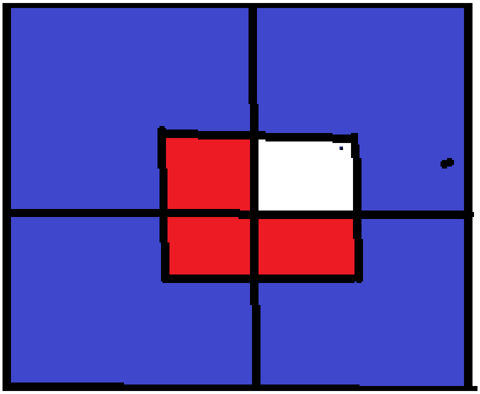
এখন আমরা এই ঢাকাঢাকি এমনভাবে করি যেন একদম ঠিক মাঝ বরাবর একটি বর্গ ফাঁকা থাকে।

জিনিসটি অনেকটি এরকম –



এবার মাঝের ফাঁকা জায়গা খেয়াল কর। এটি তো একটি 2×2 বর্গ। এটাকে কি একটি এল সেইপ দিয়ে এমনভাবে পূরণ করা যাবে না যেন একটি ঘর বাকি থাকে?

অবশ্যই, এভাবে –



তাহলে কী দাঁড়াল? আমরা $n + 1$ এর জন্যও জিনিসটি সত্য পেয়ে গেলাম। তাহলে তো যেকোনো মানের বেলাতেই এটি খাটবে, তাই না?

আর যাহোক তোমাদের এটুক বুঝাতে পেরেছি মনে হয় আরোহ এর গুরুত্ব কতখানি। এই বইয়ের বিভিন্ন জায়গাতেই এর ব্যবহার পাবে। ছোট ছোট জিনিস থেকে আসলে এত বড় কিছু করা যায় তা আমরা আগে কখনো ভাবিনি তাই না? আর এখানেই তো গণিতের মজা!

ঝগড়াঝাঁটির গণিত (Contradiction)

গণিতে যে সব সময় কোনো কিছু হবেই তা ধরা ঠিক না। অনেক সময় একটি মজার ব্যাপার দেখা যায়, কোনো কিছু হবে না এটি ধরে কোনো কিছু প্রমাণ করা যায়। আর এটাই হচ্ছে contradiction. অবাক হচ্ছো কিছুটা তাই না? চল কিছু মজার ব্যাপার দেখি, তাহলেই বুঝবে।

বলতে পারো একদম শুরুতে কোন অমূলদ সংখ্যা আবিস্কার হয়েছিল? হ্যাঁ, $\sqrt{2}$। কথিত আছে গণিতবিদরা যখন এটি বের করেছিল যে একে মুলদ আকারে দেখা যায় না, তখন নাকি তাদের মাথায় আকাশ ভেঙ্গে পড়েছিল। আর যে এটি আবিস্কার করেছিল তাকে নাকি ফাঁসি দেয়া হয়েছিল!

যাই হোক, আসো আমরাও দেখি ফাঁসিতে ঝুলতে পারি কিনা! এর জন্য শুরুতেই আমরা একটি কাজ করবো। ধরে নিব যে $\sqrt{2}$ অমুলদ না, বরং এটি মুলদ। তাহলে একে অবশ্যই $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যাবে, যেখানে লব আর হর দুইটি হচ্ছে স্বাভাবিক সংখ্যা আর সহমৌলিক (কেন?)।

তাহলে $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $2 = \frac{p^2}{q^2}$
মানে দাঁড়াচ্ছে, $2q^2 = p^2$
এখন, p তো অবশ্যই জোড় হবে, কেননা বাম পাশের পদটি জোড়।
ধরলাম, $p = 2t$। তবে, $2q^2 = p^2 = 4t^2$
সুতরাং $q^2 = 2t^2$
অর্থাৎ q ও জোড়।

হর ও লব দুটোই জোড়! কিন্তু এটি তো আমাদের মতে অসম্ভব! কারণ আমরা আগেই বলে নিয়েছি যে হর আর লব সহমৌলিক। তাহলে দুইটি জোড় হয় কীভাবে?

তার মানে আমাদের ধরা ভুল ছিল, তাই $\sqrt{2}$ হচ্ছে একটি অমুলদ সংখ্যা।

আরেকটি উদাহরণ দেখা যাক –
দেখাতে হবে যে, $b^2 + b + 1 = a^2$ এ সমীকরণের b, a এর এমন কোনো পূর্ণ সাংখ্যিক মান হতে পারে না, যেন উভয় পাশ সত্য হয়।

আগের মতো আমরা ধরে নেই, হ্যাঁ, কথাটি মিথ্যা। a ও b এর এমন কোনো না কোনো পূর্ণ সাংখ্যিক ধনাত্মক মান আছে যেন উভয় পাস সত্য হয়। যা হোক আমাদের কাজ শুরু করা যাক, b^2 কে একপাশে নিয়ে এসে –

তাহলে $b + 1 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

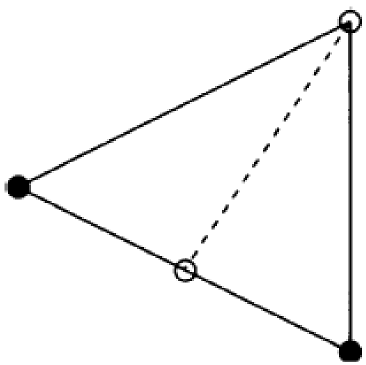
আচ্ছা b এর সবচেয়ে ছোট মান কোনটি হতে পারে? 1, সেক্ষেত্রে a এর মান দাঁড়ায়, $\sqrt{3}$. তাহলে দেখা যাচ্ছে b এর আরো বড় মান নিলে a এর আরো বড় মান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ a ও b এর ব্যবধান কমপক্ষে 1 এর বেশি হবেই।

এবার খুব ভালো করে খেয়াল করো, (a-b) এর মান এমনিতেই 1 হতে বড়, আবার তার সাথে গুণ হয়েছে (a + b). বাম পাশে কেবল আছে b + 1. তাহলে কি দুপাশ সমান হওয়া কখনো সম্ভব? কখনোই না।

তাহলে আমাদের শুরুতে ধরা ভুল ছিল নিশ্চয়ই! অর্থাৎ a ও b এর কোনো পূর্ণ সাংখ্যিক মান নেই যার কারণে দুই পক্ষ সমান হবে।

এবার আরেকটি উদাহরণে যাওয়া যাক।

ধর একটি কাগজের উপর অনেকগুলো সাদা আর কালো ডট আছে। কিন্তু এরা এমনভাবে আছে যেন যেকোনো দুইটি সাদা বা কোনো দুটি কালো ডট যোগ করলে তার ভিতরে একটি সাদা বা একটি কালো ডট থাকবেই। এখানে প্রমাণ করতে হবে, এ শর্তে ডটগুলো একই লাইনের উপর থাকবে।



কীভাবে শুরু করা যায় বলতো? আচ্ছা আমরা ধরে নেই, না এরা এক লাইনে থাকবে না। এরা যেহেতু এক লাইনে নেই, তাই তাদের যে কোনো তিনটি দিয়ে অবশ্যই একটি ত্রিভুজ বানানো যাবে। ধরে নিলাম, এ ত্রিভুজগুলোর ভিতর সবচেয়ে ছোট একটি ত্রিভুজ আছে।

ত্রিভুজটি একে ফেলি। ধরলাম, তিনটি ডটের ভিতর দুইটি কালো আর একটি সাদা। যেহেতু দুইটি ডট কালো, তাই এদের যোগ করলে ভিতরে তো একটি সাদা থাকবেই।

সর্বনাশ, এখন তো এই সাদা, আরেকটি কালো আর বাকি সাদা দিয়ে একটি ত্রিভুজ বানানো যাবে। যার আয়তন আগের ত্রিভুজ থেকে ছোট হবে। কিন্তু এটি তো আমাদের শর্ত বিরোধী! সুতরাং আমাদের ধরাটি ভুল ছিল এবং ডটগুলো একই লাইনে থাকবে।

Contradiction এর অনেক উদাহরণ দেয়া যায়, আমরা বইয়ের বাকি অংশে এর প্রয়োগ দেখবো। একটি উদাহরণ দিয়ে শেষ করা যাক–

একটি সেট কল্পনা কর, {1, 2, 3, 4, 5, 6, …….., 2015}. ধর, এর প্রত্যেকটি নাম্বারকে তুমি এক একটি নাম দিলা, a_1, a_2, a_3, ………. অবশ্য $a_1 = 1$ হতেই হবে এমন কোনো কথা নাই। $a_1 = 64$ ও হতে পারে। আসল কথা হচ্ছে তুমি এই সেটের প্রত্যেকটি নাম্বার নিয়ে ঘাড় ধরে একেকটি a এর মানের ভিতর বসিয়ে দিবে। এখন তোমাকে প্রমাণ করতে হবে, $(a_1 - 1)X(a_2 - 2)$……… $…X(a_{2015} - 1)$ একটি জোড় সংখ্যা!

বিষয়টি নিয়ে একটু ভাবা যাক। বলো তো গুণফলটায় সর্বনিম্ন কয়টি জোড় সংখ্যা থাকলে এটি জোড় হবে?

অবশ্যই একটি। তাহলে আমরা ধরে নেই না, সবগুলো বিজোড় সংখ্যা!

এখন বলো তো a_1 কি জোড় না বিজোড়? অবশ্যই জোড়, কারণ $a_1 - 1$ বিজোড়। যেহেতু 1 বিজোড়, তাই a_1 কে তো জোড় হতেই হবে। তাহলে বল তো আমরা কী কী জোড় পেলাম?

a_1, a_3, a_5, a_7, ………………., a_{2015} মানে 1008টি।

কিন্তু উপরের সেটটায় দেখ, জোড় সংখ্যা আছে 1007টি। তার মানে?

মানে আর কি! আমাদের ধরায় ভুল ছিল, তাই একটি না একটি জোড় হবেই। আর তাই গুণফলটি জোড় হবেই।

পিজিওন হোল নিয়ম (কবুতর নিয়ে লাফালাফি)

নামটি শুনে একটু অদ্ভূত লাগছে তাই না। অংকের ভিতরে কবুতর এল কীভাবে! তাহলে চল এবার একটি মজার জিনিস দেখা যাক।

ধর তোমরা তিন ভাই বোন। তোমাদের আব্বু তোমাদের জন্য চকলেট নিয়ে এসেছে চারটি। তোমাদের সবার জন্য অন্তত একটি করে চকলেট। এখন তোমাকে বললাম তোমাদের যেকোনো একজন দুইটি চকলেট পাবেই। তাহলে কি কোনো ভুল হবে?

অবশ্যই না, কারণ তিনটি দেবার পর বাকি একটি কাউকে না কাউকে তো দিতে হবেই। তাহলে সে দুইটি চকলেট পেয়ে যাবে। তাই নয় কি? এ ব্যাপারটিই হলো পিজিওন হোল নিয়ম। যদি তোমার কাছে n টি কবুতরের খোপ আর $n + 1$ টি কবুতর থাকে আর প্রতিটি খোপে অন্তত একটি কবুতর রাখা দরকার তাহলে অবশ্যই কোনো না কোনো খোপে দুইটি বা তার বেশি কবুতর বসবে। খুব সোজা, তাই না?

জানি, তোমরা ভাবছো এত সহজ জিনিস কী কাজে লাগে! আসলে একটু পরে আমরা এমন কিছু অবাক হওয়ার মতো জিনিস দেখবো।

এই সেটটা দেখ তো {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. প্রমাণ করতে পারবে, এ সেট থেকে যেকোনো পাঁচটি সংখ্যা নিলে দুইটির যোগফল 9 হবে?

এবার ম্যাজিক দেখ। আমরা নাম্বারগুলোকে কয়েকটি উপসেটে ভাগ করে ফেলি – {1, 8}, {2, 7}, {3, 6}, {4, 5}

তোমাকে পাঁচটি নাম্বার নিতে বলা হয়েছে। আচ্ছা বলো তো নাম্বার দুইটার যোগফল 9 হবে না কখন? হ্যাঁ, যখন এ উপসেট হতে কেবল একটি করে নাম্বার নিব, দুইটি নিলেই শেষ।

কিন্তু, এখানে তো চারটি উপসেট। আমাদের তো পাঁচটি নিতেই হবে। তাহলে যেকোনো একটি উপসেট থেকে তো দুইটি নিতেই হবে! তাহলে কী দাঁড়ালো? পাঁচটি নিলে যে কোনো দুইটির যোগফল 9 হবেই।

এবার আরেকটি উদাহরণ দেয়া যাক।

ধর তোমাকে দশটি নাম্বার দেয়া হলো। বলা হলো, এর ভিতরে কমপক্ষে দুটি নাম্বার কে 9 দিয়ে ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকবে। এটি কি তুমি মানবে?

একটি নাম্বারকে 9 দিয়ে ভাগ করলে কী কী ভাগশেষ আসতে পারে? 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 মোট নয় রকমের ভাগশেষ। এখন তুমিই বলো, দশটি নম্বরের কি নয়টি আলাদা ভাগশেষ থাকবে? একটি না একটি তো একই হবে, তাই না?

এবার আমরা একটু কঠিন সমস্যা নিয়ে আলোচনা করা যাক।

ধর, n যেকোনো একটি নাম্বার। একটি সেট কল্পনা কর, {1, 2, 3, 4, 5, 6, ………, 2n}। প্রমাণ করতে হবে যে, আমরা যদি এ সেট হতে n+1 টি নাম্বার নেই, তার ভিতর কমপক্ষে এমন দুইটি নাম্বার আছে যারা একটি আরেকটি দ্বারা বিভাজ্য হবে।

আগের মতো একই কাজ করি। কিছু উপসেট বানিয়ে ফেলি, যাদের ভেতর যেকোনো দুইটি একটি আরেকটি দিয়ে বিভাজ্য হবে।

কি, কঠিন মনে হচ্ছে?

আচ্ছা এ সেটটি কেমন? {1, 2, 4, 8, 16, 32, ………} একটি আরেকটি দিয়ে বিভাজ্য পেলে?

এবার 3 শুরু করা যাক, {3, 6, 12, 24, ……..}

বল তো এবার কত দিয়ে শুরু করবো? অবশ্যই 5 দিয়ে। কারণ 4 তো আগের সেটেই আছে। আমরা চাচ্ছি এমন কতগুলো সেট বানাতে যেন প্রত্যেক উপাদান আলাদা হয়। তাহলে {5, 10, 20, ……….}

এবার কত দিয়ে? 7 দিয়ে। {7, 14, 28, ……..}

এভাবে কয়টি সেট হবে? খেয়াল করেছ কি, শুরুতে সব সময় বিজোড় নাম্বার নিচ্ছি? তাহলে সেট হবে নিশ্চয়ই, মোট নাম্বার এর অর্ধেক, অর্থাৎ n টা।

এখন আমাদের কাজটি বেশ সহজ হয়ে গেল। আমরা আমাদের সেটটিকে nটি উপসেটে ভাগ করে ফেলেছি (তোমরা একটু অবাক হচ্ছো? ভাবছো সব নাম্বার কি আসছে? একটু ভেবে দেখ তো!)

আমাদের উপসেট আছে n টি, আর নিতে হবে n+1 টি। তাহলে যেকোনো একটি সেট হতে তো দুইটি নিতেই হবে। তাহলে ব্যাপারখানা কী দাঁড়াচ্ছে?

পিজিওন হোল, আরেকবার

এবার আমরা একটু অন্যভাবে পিজিওন হোল নিয়মটি দেখি আসি। এতক্ষণে তোমাদের মনে একটু কি খটকা লাগেনি? আমরা বারবার বলে আসছি nটি খোপ আর n+1 টি কবুতর। এটি বাদে আর অন্যকিছু কি হতে পারে না?

অবশ্যই পারে, আর এ ব্যাপারটিই এখন আমরা দেখবো।

ধরা যাক, তোমার কাছে নয়টি কবুতর আছে আর চারটি খোপ আছে। এবার বলো তো, কমপক্ষে কয়টি কবুতর কোনো একটি খোপে থাকবেই?

খুব সহজ, চারটি খোপে একটি একটি করে কবতর বসাতে থাকো। কি দুইবার বসাতে পেরেছ না প্রতিটিতে? (4 × 2 = 8). একটি বাকি থাকে। কোনো না কোনো খোঁপে তো এটি বসাতেই হবে, তাই না? আর এদিকে 9 কে 4 দিয়ে ভাগ করলে দাড়ায় 2.25 . এর পরের সংখ্যাটিই অর্থাৎ তিন হচ্ছে আমাদের উত্তর।

অর্থাৎ আমাদের যদি pটি কবুতর আর nটি খোপ জোগাড় করতে পারি, তাহলে বলা যায়, কোনো না কোনো একটি খোপে p কে n দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগফলটি পাব এবং তা পূর্ণ সংখ্যা হলে তো ভালো ওইটাই থাকবে আর না হলে এর পরের নাম্বারটি থাকবে। এ জিনিসটাকে বলা হয় সিলিং। যেমন 2.25 এর সিলিং 3। 3.32 এর সিলিং 4।

এবার ছোট্ট একটি সমস্যা।

ধর একটি ঘরে 87 জন লোক আছে। প্রমাণ করতে হবে এদের মধ্যে কমপক্ষে চারজন আছে যাদের নামের শুরুর বর্ণ এক।

কাজটি খুব সহজ, বর্ণ আছে মোট 26 টি। এখন 26 × 3 = 78। 87 কে 26 দিয়ে ভাগ করলে এর সিলিং হবে 4. অর্থাৎ চারজনের নামের শুরু একই হবে।

গড়মান তত্ত্ব

গড়মান তত্ত্ব খুব সাধারণ একটি ব্যাপার। একে দুইভাবে বলা যেতে পারে –

(1) যদি কতগুলি সংখ্যার বীজগাণিতিক গড় n হয় তবে এ সংখ্যাগুলোর ভিতরে কমপক্ষে একটি সংখ্যা আছে যা n হতে বড় আর কমপক্ষে একটি সংখ্যা আছে যা n হতে ছোট (অথবা সবাই সমান)।

(2) আবার কতগুলি সংখ্যার জ্যামিতিক গড় যদি n হয়, তবেও আগের মতো দুইটি সংখ্যা পাওয়া যাবে যার একটি বড় আরেকটি ছোট (অথবা সবাই সমান)।

(জ্যামিতিক গড় যারা বুঝো না - ধরলাম কয়েকটি সংখ্যা $a_1, a_2, a_3,\ldots\ldots, a_n$ তাহলে এদের জ্যামিতিক গড় হবে, $\sqrt[n]{a1, a2, a3, \ldots\ldots\ldots, an}$)। কেন এ ব্যাপারটি ঘটলো একটু চিন্তা কর, পেয়ে যাবে উত্তর।

যা হোক এটাও যে খুব কাজে লাগে ঝামেলায় না গিয়ে চলো ঝটপট এর উদাহরণ দেখে ফেলি।

ধরা যাক একটি বৃত্তে এর চারপাশে 1, 2, 3, 4, 5, 5, ...,10 এ 10টি নাম্বার বসানো হলো যে কোনো ক্রমে। এবার প্রমাণ করে দেখাতে হবে যে, এর ভিতরে কোনো এক জায়গায় পরপর তিনটি নাম্বারের যোগফল 18 থেকে ছোট হবে।

আমরা ধরে নিলাম, 1 বাদে বাকি নাম্বারগুলোকে $a_1, a_2,\ldots\ldots\ldots, a_9$ আকারে লেখা যায়। এবার এক কাজ করা যাক, এ নাম্বারগুলোকে তিনটি গ্রুপে ভাগ করা যাক - $(a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), (a_7, a_8, a_9)$। আমরা কিন্তু জানি না a1, a2 এসবের মান কত, কেবলমাত্র ধরেছি।

এবার এ তিনটি গ্রুপের গড় দাঁড়ায়, $\frac{1}{3} \times$ ((a1, a2, a3), (a4, a5, a6), (a7, a8, a9)) । $\frac{1}{3} \times (2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 10) = 18.$
অর্থাৎ তিনটি গ্রুপের যে কোনো একটি অবশ্যই 18 হতে ছোট হবে।

আরেকটি উদাহরণ দেখা যাক –

একটি সমতলে n টি বিন্দু আছে, যেখানে n এর মান 4 হতে বড়। এখন দুইটি দুইটি বিন্দু নিয়ে যোগ করা হলো। ফলে কয়েকটি রেখা পাওয়া গেল। এখন এ রেখাগুলোর ভিতর n+1 টি রেখা আছে যাদের দৈর্ঘ্য একই, ধরা যাক 5 সে,মি। দেখাতে হবে এ বিন্দুগুলোর ভিতর এমন একটি বিন্দু p আছে যেন এ বিন্দুকে স্পর্শ করে যে সব রেখা আকা হয়েছে যার ভিতর কমপক্ষে তিনটি রেখার দৈর্ঘ্য 5 সেমি হবে।

খুব কঠিন না বিষয়টি দেখানো। ধরে নিলাম আমাদের বিন্দুগুলো হচ্ছে $p_1, p_2, \ldots, p_n$. আর 5 সেমি দৈর্ঘ্যের রেখাগুলো যেগুলো p_i (i = 1, 2, 3, …, 5) কে স্পর্শ করে যায় তারা হলো $d_1, d_2, d_3,\ldots\ldots, d_n$। তাহলে $d_1 + d_2 + \ldots\ldots\ldots + d_n = 2x(n+1)$

কেন দুই দিয়ে গুণ হলো? আসলে একটি রেখা তো দুইটি বিন্দু দিয়ে যাবে, আর তুমি প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য হিসাব করছো। তাহলে কি ডাবল হয়ে যাবে না যোগফলটা?

আচ্ছা এবার গড়মান তত্ত্ব ব্যবহার করা যাক। এদের গড় $\frac{2x(n+1)}{n}$। এর মান তো অবশ্যই 2 হতে বড় হবে, কমপক্ষে তিন হবে। অর্থাৎ আমরা একটি d_nএর মান পেলাম তিন এর সমান বা বড়। তাহলে কি প্রমাণ হয়ে গেল না?

রিকারশন : টাওয়ার অব হ্যানয়

এখন আমরা কিছু মজার জিনিস দেখব, যার শুরুটি একটু অন্যরকম। একদম গোড়া থেকে শুরু করে ধাপে ধাপে শেষ পর্যন্ত যেতে হয়। একটি ধাপ বারবার করে যেতে হয়। এর নাম recursion .

Recursion এর অনেক মজার মজার জিনিস আছে। অবাক হয়ে দেখবে কীভাবে একটি ছোট কিছু দিয়ে খুব বড় কিছু করা যায়। যেমন টাওয়ার অব হ্যানয়। এ সমস্যাটির নাম শুনে একটু অন্যরকম লাগছে না? মজার ব্যাপার হচ্ছে এ সমস্যার সাথে হ্যানয় এর কোনো সম্পর্ক নেই। বরং সমস্যাটি বার্মার এক কাল্পনিক টাওয়ারকে নিয়ে। 1883 সালে এডওয়ার্ড লুকাস এ সমস্যাটি দেন।

সমস্যাটি এরকম –

বার্মার এক মন্দিরে পুরোহিতরা গোল হয়ে বসে আছে। মোটিমুটি বিরক্ত হয়ে গেছে তারা। কী এক ঘোড়ার ডিমের কাজ করছে মন্দিরে বসে বসে। এর চেয়ে স্বর্গে বসে আরাম করবে তারা। যা হোক ওরা বসে বসে একটা পরিকল্পনা করলো। সৃষ্টিকর্তার কান ভারী করবে আর তিনি বিরক্ত হয়ে পৃথিবী ধংস করে দিবেন।

যেই ভাবা সেই কাজ। একসাথে সৃষ্টিকর্তা কে ধরলো সবাই। কিন্তু সৃষ্টিকর্তা তো আর এত বোকা না, চালাকি তিনি ঠিকই ধরে ফেললেন। এখন তিনি পুরোহিতদের একটি ছোট্ট কাজ দিলেন। কাজটি শেষ হলেই পৃথিবী ধ্বংস করে দিবেন।

মন্দিরের ছাদে তিনটি রুপোর দণ্ড আছে। এ রুপোর দণ্ডের প্রথমটিতে 64টি সোনার চাকা উপর থেকে নিচে ছোট থেকে বড় আকারে সাজানো আছে। এখন তৃতীয় দণ্ডে চাকাগুলো আনতে হবে। ইচ্ছে করলে দ্বিতীয় ডণ্ডে চাকাগুলো সাজানোর খাতিরে রাখা যাবে। কিন্তু দুইটি শর্ত আছে,

(1) সাজানোর সময় কোনো চাকতিকে এর চেয়ে ছোট কোনো চাকতির উপর রাখা যাবে না।
(2) একবারে একটি চাকতিকেই সরানো যাবে।

এ ছোট্ট কাজটুকু করলেই স্রষ্টা পৃথিবী ধংস করে দিবেন।

এখন তোমরা হয়তো ভাবছো, এটি কি গাঁজাখুরি ব্যাপার? কতক্ষণই বা লাগবে! পৃথিবী তাহলে তো কত আগেই শেষ হয়ে যেত!

সত্যিই কি তাই? আসো, ব্যাপারটি একটু দেখা যাক। ধরা যাক, তিনটি চাকতি আছে প্রথম দণ্ডে। তাহলে কীভাবে কাজটি করা যাবে? ধর, উপর থেকে নিচে দুইটি চাকতি আছে a আর b. তাহলে b বড় আর a ছোট। কতবার চেষ্টা করে সরানো যাবে?

খুব সহজ। প্রথমে উপরের a কে দুই নং দণ্ডে নাও, b কে তিন নং এ রাখ, আর এখন এর উপর a কে রাখ। তাহলে কয় বারে পারলে? হুম্ম, তিনবারে।

এবার ধরা যাক তিনটি চাকতি a, b, c. তাহলে c সবচেয়ে বড় আর a সবচেয়ে ছোট। এবার আমরা একটি কাজ করি। C কে বসিয়ে রাখলাম। আর a ও b নিয়ে কাজ করি। আমাদের কাজ এদের দুই নং দণ্ডে আগের মতো করে বসানো। বলো তো কয়বারে পারবো? একটু আগেই করে এসেছি না? তিনবারে। এবার c কে আস্তে করে তিন নং এ বসিয়ে দেই। আমাদের কাজটি এবার সহজ। ab কে এবার তিন নং এ আনতে হবে। কয়বারে? অবশ্যই তিনবারে।

তাহলে মোট চেষ্টা $3 + 1 + 3 = 7$.

এবার যদি চারটি চাকতি থাকতো তবে? $7+1+7 = 15$ বারে।

এবার ধরা যাক, 64 টি চাকতি T_{64} বার চেষ্টা করে সাজানো যাবে।

63 টি চাকতি T_{63} ভাবে এভাবে।

তাহলে বল তো, T_0 এর মান কত হবে? অবশ্যই 0 . কারণ চাকতি না থাকলে সরাবে কী?

এবার T_1? 1.

T_2? আগেই বের করেছিলাম $3 = 2^2 - 1$

তাহলে, $T_3 = 2T_2 + 1 = 2 \times (2^2 - 1) +1 = 2^3 - 1$

$T_4 = 2T_3 + 1 = 2^4 - 1$

তাহলে, $T_{64} = 2^{64} - 1$.

কি, সংখ্যাটি কম মনে হচ্ছে? দাঁড়াও একটি হিসাব করি। $2^{10} = 1024$, একে 10^3 ধরি।

তাহলে, $2^{64} = 2^4 \times 2^{60} = 16 \times 10^{18}$

মানে বুঝছো? যদি একটি চাকতি সরাতে এক মাইক্রো সেকেন্ড সময়ও লাগে, তাহলে 5000 শতাব্দি লেগে যাবে। তাই বুঝতেই পারছো সৃষ্টিকর্তার সাথে ফাঁকিবাজী করে লাভ নেই!

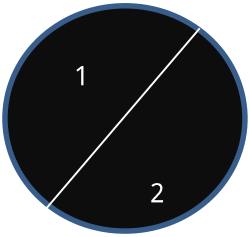
কি, আমাদের কাজটি দেখলে? প্রথমে খুব ছোট্ট একটি সমীকরণ বানালাম। আর তারপর এটি বারবার ব্যবহার করে কত্ত বড় একটি জিনিস বানিয়ে ফেললাম। আর এটিই হচ্ছে পুনরাবৃত্তি বা recursion!

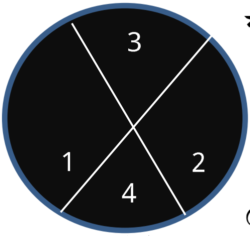
পিজ্জা সমস্যা

এবার একটি মজার সমস্যা দেয়া যাক।

ধর, তুমি জন্মদিনের পার্টিতে বসে আছ। সামনে একটিই কেক। কিন্তু তোমার একগাদা বন্ধু বান্ধব এসে জমা হয়েছে। ভারী বিপদ! কেক তো একটিই। এত জন মানুষ, কীভাবে সবাইকে দিবে? আবার কেকটিতে তো বেশি ছুরির পোচ দেয়াও যাবে না। লোকে কী ভাববে? যাই হোক তুমি সমস্যা সমাধানে খুব ভালো। তাই এবার ঝটপট বের করে ফেলতো যদি n বার কেকটা কাটো তবে সর্বোচ্চ কত টুকরা হবে?

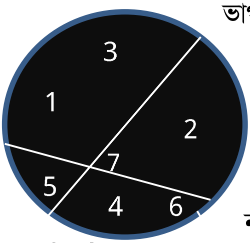
ধর শুরুতে তুমি কোনো ছুরি চালাওনি। তাহলে কেকটা কয় টুকরা থাকবে? অবশ্যই আস্ত কেক থাকবে অর্থাৎ এক টুকরোই থাকবে। এটিকে L_0 বললে $L_0 = 1$. একবার কাটলে কয় টুকরা হবে? অবশ্যই দুই টুকরা, মানে $L_1 = 2$.





যদি দুইবার কাটি, তবে? অবশ্যই চার টুকরা। মানে $L_2 = 4$.

দেখলে? আগের 1 আর 2 নং এলাকাকে নতুন রেখাটি দুইটি নতুন এলাকায় ভাগ করেছে। তাই টুকরার সংখ্যা দুই বেড়ে গেছে।



এবার আসা যাক তিনটি রেখার বেলায়। আচ্ছা বলো তো এবার নতুন রেখা কয়টি নতুন এলাকা তৈরি করবে? তিনটি! বিশ্বাস হলো না?

তাহলে দেখ, নতুন রেখাটি 4 নং এ 7 নং, 1 নং এ 5 নং আর 2 নং এ 6 নং এলাকা তৈরি করেছে। তার মানে নতুন তিনটি এলাকা। তাহলে $L_3 = 4 + 3 = 7$.

$L_n = L_{n-1} + n$
$= L_{n-2} + (n - 1) + n.$
$= L_{n-3} + (n - 2) + (n - 1) + n$
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$= L_0 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$

এবার বলতো, ধারাটির যোগফল কত? $\frac{n\,(n+1)}{2}$

তাহলে $L_n = 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}$.

জোসেফাস সমস্যা

Flavirus Josephus একজন বিখ্যাত ইতিহাসবিদ ছিলেন প্রথম শতাব্দির। তাকে নিয়ে একটি কাহিনী প্রচলিত আছে।

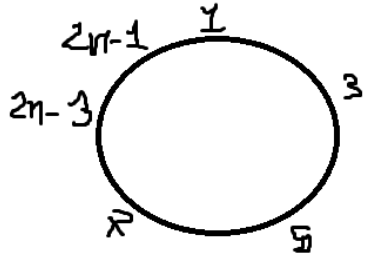
একবার এক যুদ্ধের সময় জোসেফাস তার 40 জন সঙ্গী নিয়ে একটি গুহায় আটকা পড়েন। তো যুদ্ধের সময়, সবার মাথা গরম। বুঝতে পারলো বাইরে গেলে মারা পড়তেই হবে। কিন্তু সবাই ঠিক করল সবাই গোল হয়ে দাঁড়াবে, এরপর কোনো এক মানুষকে নির্দিষ্ট রেখে প্রতি তিন নাম্বার লোক নিজে আত্মহত্যা করবে, আর শেষে যে দুইজন থাকবে, তারা যা খুশি তাই করবে, মরার দরকার নেই।

তো জোসেফাস খুব চালাক। ও আর ওর বন্ধু এমন এক জায়গায় দাঁড়ালো যেন ওরাই হয় শেষ দুইজন ব্যাক্তি। এবার বলতে হবে তারা কোনো পজিসন এ দাড়িয়েছিলেন?

আচ্ছা আমি এ সমস্যাটি তোমাদের হাতে ছেড়ে দিবো, কিন্তু এর একটি অন্য প্রমাণ দেখাবো তোমাদের। প্রশ্নটি আমরা নতুনভাবে করি।

ধরলাম 41 জন মানুষ আছে আর প্রতি দ্বিতীয় জনকে আত্মহত্যা করতে হচ্ছে। তাহলে শেষে তো একজন থাকবে। আমাদের বলতে হবে ঐ নাম্বারটি কত?

ধরলাম, শেষে যে মানুষটি থাকবে, সে হচ্ছে j(n), যেখানে n হচ্ছে মোট মানুষ। শুরুতে ধরে নিলাম, n হচ্ছে জোড় সংখ্যা। হিসাবের সুবিধার জন্য আমরা ধরে নিলাম, মোট 2n সংখ্যক লোক আছে শুরুতে। প্রথম ধাপের শেষে সব বিজোড় নাম্বার বাকি থাকবে। প্রথম ধাপ শেষে বিষয়টি হবে এরকম –



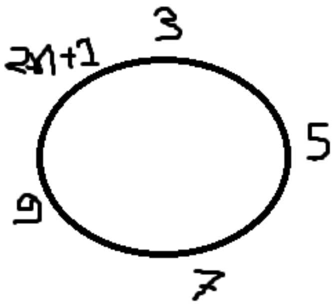
এরপরের বার 3 চলে যাবে। ব্যাপারটি অনেকটি এরকম না যে nটি মানুষ নিয়ে শুরু করলাম, কিন্তু প্রতি মানুষ এর নাম্বারকে দ্বিগুণ করে দিলাম, আর এক বাদ দিয়ে দিলাম! তাহলে j(2n) = 2j(n) - 1

এবার আমাদের পক্ষে সমাধান করা কোনো ব্যাপার নয়। আচ্ছা j(1) কত?
অবশ্যই 1.

তাহলে j(2) = 2 × 1 - 1 = 1.
J(4) = 2 × j(2) - 1 = 1.

$J(6) = 2 \times j(3) - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

এভাবে আমরা বের করে ফেলতে পারি।



এখন যদি বলা হয়ে থাকে বিজোড়, তখন কী করবো? ধরা যাক, 2n+1 জন মানুষ আছে। তাহলে প্রথম ধাপের পর কী দাঁড়াবে?

এবার কী হলো সোজা আগের নাম্বারের দ্বিগুণ যোগ এক। তাহলে $j(2n + 1) = 2j(n) + 1$

এভাবে আমরা সব ইচ্ছে করলে বের করে ফেলতে পারি, তাই না? সমস্যাটির একটি সহজ সমাধানও আছে, আমরা যদি এভাবে লিখি তাহলে বিষয়টি বেশ ভালোভাবে দেখা যায়।

n	**1**	**2 3**	**4 5 6 7**	**8 9 10 11 12 13 14 15**	**16**
J(n)	1	1 3	1 3 5 7	1 3 5 7 9 11 13 15	1

তাহলে দেখা যাচ্ছে, আমরা যদি কোনো n কে 2^m+k আকারে লিখতে পারি তাহলে, $J(2^m + k) = 2k + 1$.

এখন আমরা এটি প্রমাণ করে ফেলবো। কঠিন ব্যাপার না, গাণিতিক আরোহ দিয়ে চলো করে ফেলি।

$m = 0$ এর জন্য তো সত্য হবেই তাই না? এবার আমরা m কে জোড় সংখ্যা ধরলাম, তাহলে $2^m + k = 2n$। তাহলে k ও জোড় সংখ্যা হবে। এখন ধরে নিলাম $J(2^m + k) = 2k + 1$. এটি সত্য।

এবার আমাদের দেখাতে হবে, m+1 এর জন্যও সত্য হবে।
এখন, $j(2^{m+1} + k) = 2 \times j(2^m + k/2) - 1$
$=2 \times (2 \times k/2 + 1) - 1$
$= 2k + 1$

ব্যাস হয়ে গেলো। বিজোড়ের বেলাতেও এটি প্রমাণ করা যায়। দেখলে তো কী সুন্দর প্রমাণ হয়ে গেল! (আচ্ছা একটি বুদ্ধি দেই, বাইনারীতে নিয়ে সংখ্যাগুলো করে দেখো তো, অনেক মজা পাবে!)

জেনারেটিং ফাংশনঃ সলভ করার উপায়

Generating function হলো প্রব্লেম সল্ভিং এর আরেকটি ধাপ। আসলে আমরা প্রব্লেম সল্ভং এর জন্য কতগুলো বিশেষ বিষয়ের সাহায্য নেই। এর ভিতর আমরা কিন্তু অনেক কিছু আগেই করলাম (যেমন- পিজিওন হোল নিয়ম, গাণিতিক আরোহ এসব আর কি!)

জেনারেটিং ফাংশনের কতগুলো মূল নিয়ম আছে। যেমন ধর, তুমি যখন x^m এবং x^n গুণ করি তখন আমরা x^{m+n} পাই। (অবাক হয়েছো? আসলে এ সব সহজ জিনিস দিয়েই কঠিন জিনিস এ আসা যায়)। আরেকটি জিনিস হলো, কোনো একটি বহুপদী f(x) এর সহগগুলোর ধর্ম জেনে অনেক কাজ সহজে করা যায়।

জেনারেটিং ফাংশন বোঝার জন্য আমাদের ধারা, বিন্যাস, সমাবেশ এসব নিয়ে একটু ধারণা থাকা লাগবে। আমরা আগেই এসব জেনে নিয়ে খুব ভালো একটি কাজ করে ফেলেছি। যাই হোক, ধরা যাক কোনো একটি ধারা হলো, $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots$ তাহলে এর জেনারেটিং ফাংশন হবে, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots\ldots$

এটি হচ্ছে জেনারেটিং ফাংশনের একদম সাধারণ একটি রুপ। এর আরো অনেক রকমভেদ আছে। এখন ধরা যাক, $1 = a_0 = a_1 = a_2 \ldots\ldots\ldots$ তাহলে এর জেনারেটিং ফাংশন হবে, $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots$

আচ্ছা একে তো ছোট করে লিখে ফেলা যায়, এভাবে $\frac{1}{1-x}$। যারা অসীমতক সমষ্টি শিখেছো তারা তো এমনিই পারবে। বাকিরা S কে x দিয়ে গুণ করে আবার S দিয়েই বিয়োগ করো। এরপর S এর মান বের করো। যদি x এর মান -1 হতে +1 এর মধ্যে হয় তাহলে।

এবার যদি এরকম হয় তাহলে, $\frac{x}{2+x}$? এখন একে এভাবে লেখা যায়, $\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{x}{1+\frac{x}{2}}$
এখন এটিকে নিশ্চয়ই এভাবে লেখা যায়, $\left(\frac{1}{2}\right) \times (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \cdots \ldots\ldots\ldots)$
এবার ধরা যাক কোনো এক ধারার প্রতি পদ হচ্ছে, $a_k = ({}^{n}{}_{K})$

এখন এর জেনারেটিং ফাংশনে হবে,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (x+1)^n$$

এখন যদি এখানে x = 1 বসাই তাহলে আমরা পাই,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

এবার যদি x = -1 বসাই তাহলে পাই,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

এবার প্রথম সমীকরণটিকে ডিফারেনসিয়েট করে পাই,

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}=n(x+1)^{n-1}$$

এবার x = 1 বসিয়ে পাই,

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

যাই হোক তোমরা নিশ্চয়ই অধৈর্য হয়ে গেছো। এখানে রিকারশন সল্ভিং কোথা হতে আসলো?

ধরা যাক, কোনো একটি রিকারশনের বেলায়, $A_0 = 1$, and $a_n = 3a_{n-1} + 2$.

এবার আমরা কয়েকটি পদ বের করি ফেলি - 1, 5, 1 7, 5 3, 1 6 1, 485, . . ., একে জেনারেটিং ফাংশন আকারে লিখে ফেলি -

$f(x) = 1 +5x + 17x^2 + 53 x^3 +\ldots\ldots\ldots$

উভয়পাশে x দিয়ে গুণ করে পাই, $x.f(x) = x + 5x^2 + 17x^3 + 53 x^4 +\ldots\ldots\ldots$

এখন দেখ একটা মজার কাজ করা যায়!

$A_n - 3a_{n-1} = 2.$

তাহলে আমরা কি এ কাজটি করতে পারি না?

$f(x) – 3f(x) = a_0 + 2(x + x^2 + x^3 +\ldots\ldots) = a_0 + \frac{2x}{1-x}$

তাহলে,

$$f(x)=\frac{1}{1-3x}+\frac{2x}{(1-x)(1-3x)}=\frac{x+1}{(1-x)(1-3x)}.$$

এবার আমাদের এ ফাংশনকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

আমরা পাই, $f(x)=\frac{x+1}{(1-x)(1-3x)}=\frac{2}{1-3x}-\frac{1}{1-x}.$

এখন, আমরা ইচ্ছে করলে লিখতে পারি,

$$\begin{aligned}f(x)&=2(1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\cdots)-(1+x+x^2+x^3+\cdots)\\&=1+(2\cdot3-1)x+(2\cdot3^2-1)x^2+(2\cdot3^3-1)x^3+\cdots,\end{aligned}$$

এবার আমরা জানি, ফাংশনটির যেকোনো সহগই হবে রিকারশনের এক একটি পদ। তাই সহজেই বলা যাচ্ছে, রিকারশনটির যেকোনো পদ হবে,

$a_n = 2\cdot3^n - 1.$

দেখলে কী সহজে আমরা পদগুলো বের করে ফেললাম। তাহলে তোমরা এখন খুব সহজেই বের করে ফেলতে পারবে রিকারশনের যে কোনো পদ, তাই না? আসলে অনেক ধরনের রিকারশনের মাধ্যমে সমাধান করা যায়। তোমরা একটি কাজ করতে

পারো, আমরা আগের যে তিনটি রিকারশন করলাম, তাদের এভাবে সলভ করে দেখতে পারো মিলে কিনা!

এবার আরেকটি মজার সমস্যা দিয়ে অধ্যায় শেষ করা যাক,

$2a + 5b = 100$ । এর কয়টি অঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সমাধান আছে?

ধরে নিলাম, u_n দিয়ে $2a + 5b = n$ এর অঋণাত্মক সমাধানের সংখ্যা বুঝানো হবে। কাজেই,

$U_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1$ …………

এখন ধরলাম,

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots,$$
$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \cdots,$$

তাহলে,

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots) \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + 2x^{10} + \cdots. \end{aligned}$$

এবার আমাদের কিন্তু খুব সুন্দর একটি সমীকরণ এসেছে। এর প্রতিটি পদে দেখ, প্রতিটি পদের সহগ কিন্তু $2a + 5b = n$ এর এক একটি u_n এর মান। কেন বিষয়টি হলো তা নিজেরা একটু ভাবো, আমি বরং একটি হিন্ট দিয়ে দেই।

ধরা যাক,

$$P(x) := (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1.$$

এখন আমরা x^2এর সহগ কীভাবে পাই? দুইটি ফাংশন থেকে x^2 এর সহগ যোগ করে। আর এভাবে ঠিক,

$$x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 2x + 1 \cdot x^2 = 8x^2,$$

এবার আমরা p(x) কে অন্যভাবে লিখে ফেলি,

$$(x^2 + x + x + x + 1)(x^2 + x + x + 1).$$

আমরা x^2 এর সহগ বের করার ব্যাপারটি লিখতে পারি এভাবে,

$$x^2 \cdot 1 + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

এখন উপরের পাওয়ারগুলো যোগ করলে পাই,

$$2+0, \quad 1+1, \quad 1+1, \quad 1+1, \quad 1+1, \quad 1+1, \quad 1+1, \quad 0+2,$$

এর মানে হচ্ছে কীভাবে কীভাবে যোগ করে দুই বানানো যায়, আর আমরা জানিই যে এটি মোট আট ভাবে সম্ভব।

এখন আশা করি উপরের লেখাটি কেন লিখলাম বুঝতে পেরেছো। যাই হোক এখন,

$$A(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad \text{and} \quad B(x)=\frac{1}{1-x^5}.$$

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)}=u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\cdots.$$

দেখলা আমরা কি সুন্দর একটি জেনারেটিং ফাংশন পেয়ে গেলাম। এবার যদি ভালো করে খেয়াল কর তবে দেখবে –

$$u_0=u_2=u_4=u_5=u_6=u_7=1 \quad \text{and} \quad u_1=u_3=0.$$

এখন, আমরা একটু আগের লেখা জেনারেটিং ফাংশন টিকে লিখতে পারি,

$$\begin{aligned}1&=(1-x^2)(1-x^5)\left(u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\cdots\right)\\&=(1-x^2-x^5+x^7)\left(u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\cdots\right)\end{aligned}$$

এখন দেখতেই পাচ্ছ বামে কেবল বেচারা এক আছে আর ডানে কত্তগুলো x এর পদ। তাহলে সমতা ঠিক রাখার জন্য তো x^k এর সহগ 0 হতেই হবে নাকি? এবার তাহলে উপরের সমীকরণের ডান দিকে গুণ করে বলে ফেলতে পারি, এ সহগ,

$$u_k-u_{k-2}-u_{k-5}+u_{k-7}$$

বিষয়টি বোঝার কথা, আর না বুঝলে এক কাজ কর। ধরা যাক, x2 এর সবগুলো সহগ নিয়ে হিসাব করে দেখ তো মিলে কিনা। এখন এর মান তো 0 হবে নাকি? তাহলে বলতে পারি,

$$u_k=u_{k-2}+u_{k-5}-u_{k-7}.$$

ব্যাস, আমরা খুব সুন্দর একটি রিকারশন সমীকরণ পেয়ে গেলাম। এখন তোমাদের কাজ হলো u_{100} এর মান বের করে ফেলা। পারবে নিশ্চয়ই, তাই না? আমি শুধু উত্তর বলে দেই, উত্তর হচ্ছে 11.

দেওয়া নেওয়ার খেলা (inclusion exclusion)

কম্বিনেটরিক্সের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ জিনিস হচ্ছে inclusion exclusion principle. বিভিন্ন সমস্যায় আমাদের প্রায়ই কিছু বাদ দিতে হয় আবার কিছু যোগ করতে হয়। আর এ ব্যাপারটাই হচ্ছে inclusion exclusion.

ধর আবুলের প্যান্টে তিনটি পকেট আছে আর এ পকেটগুলিতে সে 5টি চকলেট এমনভাবে রাখতে চায় যেন কোনো পকেট ফাঁকা না থাকে। কতভাবে সে এ কাজটি করতে পারবে?

আমি জানি তোমরা শুরুর অধ্যায়ের জিনিসপত্র পড়ে মনে করছো, আরে এ তো খুব সহজ। মোট 3^5 ভাবে সম্ভব। কারণ প্রথম চকলেট তিনটি পকেটের যে কোনোটাতে যেতে পারে। পরেরটাও একই ভাবে তার পরেরটাও একই ভাবে। তাহলে মোট উপায় দাঁড়ায়, $3^5 = 243$।

আচ্ছা দাঁড়াও দাঁড়াও, আমাদের বলা হয়েছে কোনো পকেট খালি থাকতে পারবে না। কিন্তু এভাবে করলে তো কোনো কোনো পকেট ফাঁকা থাকবে, তাই না? এখন কোন কোন ক্ষেত্রে এ কাজটি হতে পারে চল দেখি।

ধরলাম প্রথম পকেট ফাঁকা, আর দ্বিতীয় আর তৃতীয় পকেট ভরা, এ ব্যাপারটি কয়ভাবে সম্ভব? অবশ্যই $2^5 = 32$ ভাবে।

এবার দ্বিতীয় পকেট ফাঁকা আর অন্য দুইটি ভরা, এটি কয়ভাবে সম্ভব? একই, 32 ভাবে। তিন নাম্বারটি ফাঁকা রেখে? একই, 32 ভাবে।

তাহলে মোট উপায় হলো, $243 – 32 – 32 - 32 = 147$. হয়ে গেল না?

দেখ আমরা বললাম, যদি একটি পকেট ফাঁকা থাকে এ ব্যাপারটি। যদি এক আর দুই নাম্বার পকেটটি ফাঁকা থাকে, তবে?

আমরা কিন্তু এ জিনিসটি বাদ দিয়ে ফেলেছি প্রথমে 32 বাদ দেবার সময়, কারণ তোমরাই বের করো। কিন্তু আমরা দ্বিতীয়বার বাদ দেবার সময় কি একটি ভুল করেছি না? দ্বিতীয়বার ও তো একটি জায়গায় দুই আর এক নং পকেট ফাঁকা থাকে, আমরা তাহলে দ্বিতীয়বার একটি বিন্যাস বেশি বাদ দিয়ে ফেলেছি।

কী আর করা, দেই 1 যোগ করে। এবার, বাকিটা বলতে হবে?

উত্তরটি বলে দেই, $147 + 1 + 1 + 1 = 150$.

এবার আরেকটি সমস্যা,

মোট কয়টি প্রাইম আছে যারা 111 এর সমান বা তার চেয়ে ছোট?

এক্ষেত্রে প্রথমে বের করে ফেলি, কয়টি কম্পোজিট নাম্বার আছে। এরপর বিয়োগ করে দিলেই হয়ে গেল।

এবার বলো তো এ কম্পোজিট নাম্বারগুলি কোন কোন প্রাইম এর গুণিতক হবে?

$\lfloor\sqrt{111}\rfloor$ =10 এর আগে যতগুলি প্রাইম নাম্বার আছে। অর্থাৎ 2, 3, 5, 7 এর।

এবার 111 কে এ সংখ্যাগুলি দিয়ে ভাগ দিবো, তাহলে যে ভাগফলগুলি পাবো, তার যোগফল কম্পোজিট নাম্বারের সংখ্যা্র সমান হবে।

ঠিক হলো? না কারণ, আমরা ছোট্ট একটি ভুল করলাম। আমরা কিছু কিছু জিনিস দুইবার গুনে ফেলেছি। আর এগুলি হলো (2×3) = 6, (2×5) =10, (2×7) =14, (3×5) = 15, (3×7) =2 1, (5×7) = 35 এর গুণিতকগুলি। তাই এবার কাজ হলো এগুলি বাদ দিয়ে দেয়া।

হলো? না, এবারও হয়নি। কারণ আমরা (2×3×5) = 30, (2×3×7) = 42, (3×5×7) = 105, (2×5×7) = 70 এদের গুণিতকগুলি শুরুতে তিনবার গুনেছিলাম। দ্বিতীয় ধাপে তিনবার বাদ দিলাম। তাই এবারের কাজ এদের গুণিতকগুলি যোগ করে ফেলা।

আমাদের কাজ শেষ, কারণ (2×3×5×7) = 210 এর গুণিতক স্বভাবতই এর ভিতর থাকবে না।

অবশেষে আমদের কাজ শেষ হলো –

$$
\begin{aligned}
&|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\
&= \left\lfloor\frac{111}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{111}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{111}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{111}{7}\right\rfloor \\
&\quad - \left\lfloor\frac{111}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{111}{10}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{111}{14}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{111}{15}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{111}{21}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{111}{35}\right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor\frac{111}{30}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{111}{42}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{111}{70}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{111}{105}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{111}{210}\right\rfloor \\
&= 55 + 37 + 22 + 15 - 18 - 11 - 7 - 7 - 5 - 3 \\
&\quad + 3 + 2 + 1 + 1 - 0 \\
&= 85.
\end{aligned}
$$

এ কটাই কি কম্পোজিট নাম্বার? না, একটু বেশি গুণলাম। কারণ এগুলোর ভিতর কিন্তু 2, 3, 5, 7 ও চলে এসেছে (কেন?) তাই এ চারটি বাদ দিয়ে পাই 81.

এখন, 111 - 81 = 30.

আমাদের একটিই কাজ বাকি, আর তা হলো এটি থেকে এক বাদ দেয়া (কারণটা বের কর। কোনো সংখ্যা মৌলিক যৌগিক কোনোটিই না?)

তাহলে উত্তর, 29. দেখা যাচ্ছে আমরা খুব সুন্দর একটি নিয়ম পেয়ে গেলাম, আর এটি হলো –

ধরা যাক, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ হলো কতগুলি সেট। এদের ইউনিয়ন সেটের সদস্য সংখ্যা হবে –

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

ধর কয়েকটি সেট হচ্ছে, $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$n(A1 \cup A2 \cup a3) = n(A1) + n(A2) + n(A3) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots - n(A1 \cap A2) - n(A1 \cap A3) - \cdots \ldots \ldots - n(A2 \cap A3) - n(A2 \cap A4) - \cdots \ldots \ldots \ldots .. + n(A1 \cap A2 \cap A3) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ..$$

এটাই হলো inclusion exclusion এর মূল ব্যাপার!

কিছু আজগুবি সংখ্যা

সমাবেশের ক্ষেত্রে আমাদের প্রায়ই কিছু আজগুবি সংখ্যার মুখোমুখি হতে হয়। চলো এসব আজগুবি সংখ্যা নিয়ে হালকা পাতলা আলোচনা করা যাক।

স্টার্লিং নাম্বার (Stirling number)

আমরা কিছুক্ষণ আগেই বাইনোমিয়াল কো-এফিসিয়েন্ট নিয়ে আলোচনা করেছি। এবার এগুলোর জমজ ভাইদের নিয়ে আলোচনা করার পালা। শুরুতেই স্টার্লিং নাম্বার নিয়ে আলোচনায় আসা যাক। দুই ধরনের স্টার্লিং নাম্বার আছে।

শুরতেই প্রথম ধরনের স্টার্লিং নাম্বার নিয়ে বলি। এটাকে লেখা হয় $[^{n}_{k}]$ এভাবে। এর মানে হচ্ছে n টি জিনিস হতে কতভাবে k টি চক্র বানানো যায়। যেমন, $[^{4}_{2}]$ মানে হচ্ছে চারটি জিনিসকে কতভাবে দুইটি চাক্রিক বিন্যাসে ভাগ করা যায়। উত্তর হচ্ছে 11.

কারণ, ধরা যাক চারটি জিনিস হচ্ছে 1, 2, 3, 4। এখন এদেরকে দুইটি চাক্রিক বিন্যাসে এভাবে ভাগ করা যায়।

123	4
132	4
123	3
123	2
123	1
132	3
132	2
132	1
12	34
13	24
14	23

অর্থাৎ মোট এগারো ভাবে, তাই 11 হচ্ছে একটি স্টার্লিং নাম্বার।

এটি খুব মজার ব্যাপার যে, $\sum_{k=0}^{n}$ [nk]= n! কেন হলো বলো তো?

দ্বিতীয় প্রকারের স্টার্লিং নাম্বারকে লেখা হয় $\{^{n}_{k}\}$ আকারে। আর এর মানে হচ্ছে n টি জিনিসকে কতভাবে k সংখ্যক উপসেটে ভাগ করা যায়। যেমন, $\{^{4}_{2}\}$ মানে হচ্ছে,

চারটি জিনিস হতে কতভাবে 2টি জিনিস এর উপসেট বানানো সম্ভব। উত্তরটি হচ্ছে সাতভাবে।

{1,2,3} {4}
{1,2,4} {3}
{1,3,4} {2}
{2,3,4} {1}
{1,2} {3,4}
{1,3} {3,4}
{1,3} {2,4}
{1,4} {2,3}

তার মানে 7 হচ্ছে একটি স্টার্লিং নাম্বার। এই নাম্বারগুলো রিকারশনের সমস্যায় প্রায়ই ঘুরে ফিরে আসে। তাই আমাদের এটি জেনে রাখা বেশ ভালো।

অয়লারিয়ান নাম্বার (Eulerian number)

অয়লারিয়ান নাম্বারের ব্যাপারটাও বেশ সোজা। এটাকে প্রকাশ করা হয় $<{}^{n}{}_{k}>$ দিয়ে। এবার দেখা যাক, এটার মানে কী?

ধরা যাক, কোনো একটি সেট {1, 2, 3, 4}. এবার এ চারটি নম্বরকে অদল বদল করা হলো। এখন প্রশ্ন হলো কোন কোনটাতে মাত্র দুই জায়গাতে একটি নম্বরেরর চেয়ে আরেকটি নম্বর বড়?

চল দেখা যাক,
{1, 3, 2, 4}   (1 < 3, 2 < 4 দুই জায়গায় এরকম বড়)
{1, 4, 2, 3}   (1 < 4, 2 < 3)
{2, 3, 1, 4}
{2,4,1,3}
{3,4,1,2}
{1,2,4,3}
{1,3,4,2}
{2,3,4,1}
{2,1,3,4}
{3,1,2,4}
{4,1,2,3}

অর্থাৎ মোট এগারোটি বিন্যাসের কেবল দুই জায়গাতে একটি নম্বর আরেকটার থেকে বড়। তাহলে $<{}^{4}{}_{2}> = 11$.

হারমোনিক নাম্বার

হারমোনিক নাম্বার এক বিশেষ ধরনের নাম্বার। এটাকে প্রকাশ করা যায় এভাবে –

$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\ldots\ldots\ldots$

তাহলে প্রথম থেকে শুরু করে কয়েকটি হারমোনিক নম্বর হলো 1, $\frac{3}{2}, \frac{11}{6}$ ....

Recurrence এর নানা সমস্যায় হারমোনিক নাম্বারের ধারণা বেশ কাজে দেয়।

ফিবোনচি নাম্বার

আমরা অধ্যায় শেষ করছি গণিতের অনেক বিখ্যাত একটি নাম্বার দিয়ে আর তা হচ্ছে ফিবোনচি নাম্বার। ফিবোনচি নাম্বার শুরু করতে হয় এভাবে, প্রথম ফিবোনচি নাম্বারটি হচ্ছে 1 আর দ্বিতীয়টাও 1। বাকি সব কয়টি পদ হচ্ছে আগের দুইটি পদের যোগফল।

তাহলে তৃতীয় পদ 1+1 =2, চতুর্থ পদ 2+1 = 3, এভাবে।

ফিবোনোচি নাম্বার অনেক কাজে লাগে গণিতের নানা শাখায়। আর বিন্যাস-সমাবেশ, বিশেষ করে কম্পিউটার সায়েন্সে এটি অনেক গুরুত্বপূর্ণ এক বিষয়।

বিভিন্ন আজগুবি সংখ্যার সাথে Recurrent সম্পর্ক

1. $\binom{n}{r}$: nটা বস্তু থেকে r টা বস্তু কতভাবে নেয়া যায়?
   $\binom{n}{r}$ মানে আমাদের সেট থেকে আমরা যেকোনো k টা বস্তু বাছাই করবো। এটা কতভাবে করা যায়? মনে করি n তম বস্তু আমার নির্বাচিত ,k টার মধ্যে থাকতেও পারে আর নাও থাকতে পারে।
   Case 1) যদি থাকে তাহলে বাকি -n-1 টা থেকে আমাদের k-1 টা বস্তু নিতে হবে। তাহলে এক্ষেত্রে অপশন $\binom{n-1}{r-1}$
   Case 2) যদি না থাকে তাহলে n-1 টা বস্তু থেকে k টা বস্তু নিতে হবে এক্ষেত্রে অপশন $\binom{n-1}{r}$.
   দুইটা একত্র করলেই পাওয়া যায় $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

2. S2(n, k) - Striling number of Second kind : S2(n, k) এর মানে হচ্ছে n টা বস্তুকে k টা সেটে কতভাগে ভাগ করা যায়। মনে করি }1,2,3{. এই তিনটা বস্তুকে যদি আমরা দুইটা সেটে ভাগ করি তাহলে -
   {1,2},{3}
   {1,3},{2}
   {2,3},{1}
   তার মানে S2(n, k) = 3
   এখন S2(n, k) নির্ণয়। যেহেতু n টা বস্তুকেই কোনো না কোনো সেটে যেতে হবে তাই এবার n তম বস্তুর জন্য আমরা দুইটা Case এ ভাগ করি। একটা হচ্ছে n তম বস্ত নিজেই একা একটি সেটে থাকবে , আরেকটা হল n তম বস্তু অন্য কারো সাথে একটা সেটে থাকবে।

Case1) একা একটি সেটে থাকবে – এক্ষেত্রে বাকি n-1 টি বস্তু k-1 টি সেটে থাকবে। তার মানে S2(n-1, k-1)

Case 2 অন্যকারো সাথে থাকবে – তারমানে বাকি n-1 জন মিলে kটা গ্রুপ গঠন করে ফেলছে। মানে S2(n-1,k). এখন n তম বস্তু এই k টি গ্রুপের যে কোনো গ্রুপে ঢুকতে পারবে। মানে এক্ষেত্রে মোট অপশোন k×S2(n-1, k)

অর্থাৎ S2(n, k) = S2(n-1, k-1) + S2(n-1, k).

3. S1(n, k) Striling number of first kind.
এর মানে হচ্ছে n জন ব্যক্তি k টি গোলটেবিলে কতভাবে বসতে পারে।] n জন ব্যক্তি একটা গোলটেবিলে কতভাবে বসতে পারে মনে আছে তো ,(n-1)![

এই প্রশ্নের কেস দুইটা হবে আগের বারের মতোই। n তম ব্যক্তি একা একটা গোলটেবিলে বসবে অথবা অন্য কারো সাথে একটা টেবিলে বসবে।

Case 1) যদি টেবিলে একা বসে। তাহলে বাকি n-1 জন k-টি 1 টেবিলে বসবে।

Case 2) টেবিলে আরো সবার সাথে বসবে। এক্ষত্রে বাকি বাকি n-1 জন k টি টেবিলে বসে পড়েছে। এটাতো S1(n-1, k)। কিন্তু এখানে n তম বস্তু কোন টেবিলে বসবে এটাই কেবল গুরুত্বপূর্ণ না সাথে সে টিক কার ডানপাশে বসবে এটাও গুরুত্বপূর্ণ। ম নয় ডান কেন বা) যেহেতু সে গোলটেবিলে ,আসলে ডান আর বাম একই কথা ?কেন অন্য কারো সাথে বসবে তার ডানে বা বামে কেউ একজন তো থাকবেই। আমরা ডান দিয়েই ব্যাপারটা বুঝানোর চেষ্টা করবো।(অর্থাৎ n তম ব্যক্তির জন্য n-1 জন ব্যক্তির ডানপাশে গিয়ে বসতে পারে এবং তার কাছে n-1 টি অপশন আছে। তাহলে তার মোট অপশন (n-1)×S1(n-1, k) টি।

দুই কেস মিলিয়ে মোট অপশন S1(n, k) = S1(n-1, k-1) + (n-1) × S1(n-1, k).

4. D(n) নির্ণয় : Derangement নির্ণয়
D(n) মানে De arrange মানে কেউ arrange করেনি -সবাই উল্টা , পাল্টা। n টি বস্তুর মধ্যে কতগুলো বিন্যাস আছে যেখানে কেউই কারো সঠিক জায়গায় নাই। যেমন n = 3 এর জন্য 321 গ্রহণযোগ্য হবে না, কারণ 2 তার নিজের অবস্থানেই আছে এমন একটা অবস্থান হতে হবে যাতে কেউ তার নিজের অবস্থানে নে। যেমন 312 একটি গ্রহণযোগ্য সমাধান। আবার প্রশ্নটা এভাবেও করা যায় n টা ঘরে n টা বস্তু আছে তারা কেউ নিজের ঘরে যাবে না নিজের)ঘর নিজের জন্য নিষিদ্ধঅন্য ঘরে যাবে (

এবং একঘরে একজনই থাকবে এটি কতভাবে সম্ভব? এখন এবারও আমরা দুইটি কেস বিবেচনা করবো। Case-1) n তম বস্তু যার ঘরে যাবে সে n এর ঘরে যাবে অর্থাৎ সেই একজন n এর ঘরে চলে আসবে। মনে করি ,{1, 2, 3, 4, 5} এর মধ্যে 5 যাবে 3 এর ঘরে আর ,3 আসবে 5 এর ঘরে। তাহলে 3, 5 এই দুইজন এবং তাদের ঘর বাদ দিলে বাকিরা মিলে হল n-2 জনের Derangement. মানে D(n-2). এখন n তম ব্যক্তি কার সাথে ঘর বদল করবে তার জন্য)n-1টি অপশন আছে(। অর্থাৎ এই কেস এর মোট অপশন (n-1) × D(n-2).

Case 2) n তম বস্তু যার ঘরে যাবে সে n এর ঘরে আসবে না। আমরা মনে করি 5 নাম্বার জন 3 নম্বরের ঘরে গেল অন্য ঘরগুলোতেও যেতে পারতো) যেহেতু তারn-1 টি অপশন(কিন্তু 3 নাম্বার ঘরের লোক 5 নাম্বার ঘরে আসবে না। তাহলে এক্ষেত্রে যদি আমরা 5 নাম্বার জন আর 3 তম ঘর বাদ দেই তাহলে ব্যপারটা কী হয়। এখানে 3 তম লোকের জন্য নিষিদ্ধ 5 নাম্বার ঘর কেননা)3 নাম্বার লোক 5 নাম্বার ঘরে গেলে তো আগের কেসই হয়ে যাচ্ছে(আর বাকি সবার জন্য নিজের নিজের ঘর নিষিদ্ধ। তার মানে এটা হল n-1 জনের derangement। তাহলে n তম জন যার ঘরে যাবে ওটা বাছাই করার জন্য)n-1) টা অপশন আছে আর বাকিটা হল D(n-1) তাহলে এক্ষেত্রে মোট অপশন (n-1) × D(n-1)

দুই কেস মিলিয়ে $D(n) = (n-1) \times \{D(n-1) + D(n-2)\}$

একটু আধটু সমস্যা

আমরা এর মধ্যে অনেক আলোচনা সমালোচনা করে ফেলেছি বিন্যাস আর সমাবেশ নিয়ে। আসলে কি জানো, যদি সমস্যা না দেয়া থাকে তবে জিনিসটি ভালোভাবে বোঝা যায় না। তাই এবার আমরা পিচ্চি পিচ্চি কয়েকটি সমস্যা সমাধান করে ফেলি।

সমস্যা 1- zeta সমস্যা

Mr এবং mrs zeta তাদের সন্তানের নাম তিন শব্দে রাখতে চান। শেষ শব্দটি হবে zeta, আর বাকি দুইটি শব্দ এমনভাবে হবে যেন, তিনটি শব্দেরই প্রথম তিনটি বর্ণ alphabetic ক্রমে থাকে। যেমন নাম হতে পারে, alu balu zeta বা calu khalu zeta কিন্তু khalu calu zeta হবে না! এবার বলতে হবে তারা কয়ভাবে নামের প্রথম বর্ণটি বেছে নিয়ে পারে?

উত্তরঃ খুব সহজ। আমাদের কাজ হচ্ছে ইংরেজি 25টি বর্ণ হতে দুইটি বর্ণ নেয়া। কয়ভাবে সম্ভব? ${}^{25}c_2$ বা 300 ভাবে। এখন যে দুইটি বর্ণ নিলাম, তাদের ক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিলেই তো হয়ে গেলো।

সমস্যা 2 - লকার সমস্যা

তোমাদের স্কুলে অনেকগুলি লকার আছে। 1 থেকে শুরু করে নাম্বার দেয়া। এখন লকার নাম্বারে যে কয়টি ডিজিট আছে সেই সংখ্যক দুই টাকা দেয়া লাগে প্রত্যেক ছাত্রকে। যদি সব ছাত্রকে মিলিয়ে মোট 13794 টাকা দেয়া লাগে, তবে মোট ছাত্র সংখ্যা কত?

উত্তরঃ তাহলে শুরুতে কতগুলি ডিজিট আছে বের করা যাক, 13794/2 = 6897 টি। 1 হতে শুরু করে 1 ডিজিটের নাম্বার আছে কয়টি? 9 টি (9 পর্যন্ত)। এবার 10 থেকে শুরু করে 99 পর্যন্ত দুই ডিজিটের নাম্বার আছে 90 টি, কাজেই মোট ডিজিট $90 \times 2 = 180$ টি।

তিন ডিজিটের বেলায়? $3 \times 900 = 2700$ টি। চার ডিজিট? $4 \times 9000 = 36000$ টি। না, বেশি হয়ে গেল। এবার 9 + 180 + 2700 = 2889। তাহলে বাকি 6897 – 2889 = 4008 টি চার ডিজিটের।

এখন 4008/4 = 1002. কাজেই মোট ছাত্র হবে 999 + 1002 = 2001 জন।

সমস্যা 3 - বিজোড় ফলাফল

ধরা যাক n একটি বিজোড় সংখ্যা, তাহলে নিচের ধারাটার যোগফল কত?

${}^{n}c_1 + {}^{n}c_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}c_{(n-1)/2}$

উত্তরঃ আমরা প্যাসকেলের ত্রিভুজ আর বাইনোমিয়াল অধ্যায়ে তো দেখেছিলাম যদি n জোড় সংখ্যা হয় তবে এদেরকে দুই ভাগে ভাগ করে ফেলা যায়, যার এক পাশের ভাগ এবং আরেক পাশের ভাগ সমান হবে।

তাহলে এটাকেও লেখা যেতে পারে, $\frac{1}{2} ({}^{n}c_1 + {}^{n}c_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}c_{n-1}) = \frac{1}{2} \times (2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$ যা সব সময় বিজোড়।

সমস্যা 4 - 2001 সমস্যা

কতগুলি সংখ্যা আছে, যারা 2001 থেকে ছোট বা তার সমান, আর যারা 3 আর 4 এর গুণিতক ,কিন্তু 5 এর গুণিতক নয়?

উত্তরঃ 2001 পর্যন্ত 3 এর গুণিতক আছে কয়টি? $\lfloor 2001/3 \rfloor = 667$। আর 4 এর? $\lfloor 2001/4 \rfloor = 500$ টি। এবার যোগ দিয়ে ফেলি 667 + 500 = 1167 টি। এখানে কিছু কি ডবল আছে? হ্যাঁ, 12 এর গুণিতকগুলি, কয়টি? $\lfloor 2001/12 \rfloor = 166$ টি।

তাহলে 1167-166 = 1000 টি।

এবার এখান থেকে পাঁচ এর গুণিতকগুলি বাদ দিতে হবে। 5 এর গুণিতক এখানে কী আকারে থাকবে? 15 অথবা 20 এর গুণিতক হিসাবে। 15 এর বেলায় $\lfloor 2001/15 \rfloor = 133$, 20 এর বেলায় $\lfloor 2001/20 \rfloor = 100$।

এগুলি কি বাদ দিলেই শেষ? না, আমরা একবার 3 এবং 5 এর লসাগু দিয়ে ভাগ করলাম আরেকবার 4 এর 5 এর। আমরা যদি 1000 থেকে এখন এদের বাদ দেই তবে আমরা কিন্তু তিনটি সংখ্যার লসাগু 60 এর গুণিতকগুলিকে দুইবার বাদ দিয়ে ফেলবো। তাহলে বাদ দেবার পর আবার একবার 60 এর গুণিতকগুলি যোগ করে দিতে হবে।

এখন $\lfloor 2001/60 \rfloor = 33$। তাহলে মোট সংখ্যা দাঁড়াবে, 1000 – 133 – 100 + 33 = 801 টি।

সমস্যা 5 - স্যান্ডউইচ মেয়ে

25 জন ছেলে আর 25 জন মেয়ে একটি গোলটেবিলে বসে আছে। দেখাও যে এদের যেভাবেই সাজানো হোক না কেন, কোনো না কোনো পজিশনে কোনো এক ব্যক্তির দুইপাশে একজন করে মেয়ে বসবেই।

উত্তরঃ ধরে নিলাম, না ব্যাপারটি সম্ভব না। কোনো ব্যাক্তির দুই পাশে দুইটি মেয়ে বসবে না। এখন আমরা মেয়েদের একটি গ্রুপ করে ফেলতে পারি এভাবে, যেহেতু কোনো ব্যাক্তির দুই পাশে দুই মেয়ে বসবে না, তাই পাশাপাশি তিন মেয়ে বসা সম্ভব না। তাহলে আমরা গ্রুপ করবো এমনভাবে যেন এ শর্ত ভঙ্গ না হয়, অর্থাৎ এসকল গ্রুপে অবশ্যই স্রর্বোচ্চ দুইজন করে মেয়ে থাকবে।

এরকম সর্বনিম্ন কয়টি গ্রুপ হওয়া সম্ভব? [25/2] = 13 টি। এরকম দুইটি পরপর গ্রুপের ভিতর কমপক্ষে দুইজন ছেলে থাকা লাগবেই (কেন?)। তাহলে এ 13 টি গ্রুপের জন্য ছেলের দরকার হবে, কমপক্ষে 2 × 13 =26 টি, যা সম্ভব না।

তবে আমাদের অনুমান ভুল হয়ে গেল। কাজেই এক ব্যক্তির দুই পাশে দুইজন মেয়ে সবসময়ই।

সমস্যা 6 - মোজা সমস্যা

তোমার কাছে 100 টি লাল, 80 টি সবুজ, 60 টি নীল আর 40 টি কালো মোজা আছে। তুমি চাও দশ জোড়া মোজা নিতে, কিন্তু প্রতি জোড়ার রং এক হতে হবে। (মানে এমন হতে পারে তুমি দুই জোড়া লাল, আট জোড়া নীল মোজা নিলে)। কিন্তু এমন সময় হঠাৎ কারেন্ট চলে গেলো, এবার বলতো কমপক্ষে কয়টি মোজা নিলে তুমি বুঝবে যে না দশ জোড়া করে এক রং এর মোজা নেয়া হয়েছে?

উত্তরঃ ধরা যাক, তোমার ভাগ্য খুব খারাপ। প্রথম চারটি মোজা উঠালে, আর চারটাই ভিন্ন রঙ এর। এবার তুমি আরেকটি মোজা উঠালে তা কোনো না কোনো মোজার রঙ এর সাথে তো মিলবেই। এভাবে কমপক্ষে পাঁচটি মোজা উঠালে তুমি এক জোড়া এক রং এর মোজা পাবে।

এবার, যদি বলা হয় দুই জোড়া এক রঙ এর মোজা? তাহলে কয়টি লাগবে? 6 টি? না, কারণ যদি আমরা এভাবে তুলি- 3 টি লাল,1 টি করে বাকি রঙ এর তবে তো হলো না।

আচ্ছা যদি 7 টি তোলা হয়? এর ভিতর তো এক জোড়া এক রঙ এর মোজা থাকবেই, বাদ দিলাম, থাকলো 5 টি। এখন এ 5 টায় তো এক জোড়া এক রঙ এর থাকবেই, যা আগেই আমরা প্রমাণ করেছি।

এবার তিন জোড়া পেতে হলে? আট টায় হবে না, কারণ আগের মতোই যদি 5 টি লাল, বাকি রঙ এর একটি করে তোলা হয়?

9 টায়? অবশ্যই, আগের মতো, এক জোড়া এক রঙ এর পাবো। বাদ দাও, থাকলো সাত, এর ভিতর আবার দুই জোড়া পাবো, একটু আগেই দেখেছি। তাহলে একটি ধারা চলে আসছে 5, 7, 9, ……

এর দশম পদ? 23. অর্থাৎ কমপক্ষে 23 টি মোজা তুলতে হবে।

সমস্যা 7 - ভগ্নাংশ

কোনো একটি মূলদ সংখ্যা নাও 0 আর 1 এর মাঝখানে। এবার একে ভগ্নাংশ আকারে এমনভাবে লিখ যেন উপরে আর নিচে কিছু কাটাকাটি যায় না। এবার হর আর লবকে গুণ করে ফেল। বলো তো ঠিক কয়টি ভগ্নাংশের বেলায় এ গুণফলটি 20! হবে?

উত্তরঃ আচ্ছা উপরে আর নিচে কাটাকাটি করে ফেললে তো হর আর লব সহ মৌলিক হয়ে যায়। এবার যদি তাই হয়, তবে অবশ্যই হর আর লবের উৎপাদকগুলির ভিতর যে মৌলিক নাম্বার আছে, তা এক হবে না।

এখন 20! এর ভিতর মৌলিক সংখ্যা আছে 22, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 মানে 8 টি। এবার এ আটটি হয় হর এ যাবে বা লব এর যাবে, মানে এদের জন্য মোট দুইটি অপশন আছে, তাহলে মোট 2^8 টি কম্বিনেশন সম্ভব।

এবার, এদের সবগুলিই কি এক এর ছোট হবে? অবশ্যই না। এদের কে দুইটি করে জোড়ায় ভাগ করা যায়, যাদের একটি অপরটার থেকে বড় (কেন?)। তাহলে মোট পাই $2^7 = 128$ টি।

সমস্যা 8 : পার্থক্য 5

প্রথম 18 টি নাম্বার হতে কয়ভাবে পাঁচটি নাম্বারকে নেয়া যাবে যেন এদের মধ্যে যে কোনো দুইটার পার্থক্য কমপক্ষে 2 হয়?

উত্তরঃ আমরা ধরে নিলাম, ঐ পাঁচটি নাম্বার হচ্ছে $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$

আমরা কি পাঁচটি নাম্বার b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 বলতে পারি যেখানে, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2-1$, $b_3 = a_3-2$, $b_4 = a_4-3$, $b_5 = a_5-4$?

অবশ্যই পারি। আচ্ছা বিপরীতভাবে বলা যায় না যে 1 হতে 14 পর্যন্ত আমাদের শর্তের পাঁচটি নাম্বার বেছে নিয়ে আমরা তা থেকে আরো পাঁচটি নাম্বার পেয়ে যেতে পারি?

যাবেই 1, 2, … যোগ করলেই হয়ে গেল।

আমরা প্রথম 14 টি নাম্বার আর আমাদের শর্তের পাঁচটি নাম্বারের মধ্যে একটি সম্পর্ক বানিয়ে ফেললাম, তাই 14 টি নাম্বার থেকে পাঁচটি নাম্বার বেছে নিলেই হলো।

তাহলে আমরা মোট $^{14}c_5 = 2002$ ভাবে বাছতে পারবো।

সমস্যা 9 - সমাধানের সমাধান

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$, এ সমীকরণ এর কয়টি সমাধান হতে পারে, যেখানে x_1, x_2, x_3, x_4 সব কয়টাই বিজোড় পূর্ণ ধনাত্মক সংখ্যা?

উত্তর: আচ্ছা কোনো বিজোড় সংখ্যাকে আমরা লিখতে পারি এভাবে, $2y - 1$.
তাহলে উপরের সমীকরণকে লেখা যায়, $2y_1 – 1 + 2y_2 – 1 + 2y_3 – 1 + 2y_4 - 1 = 98$
বা, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 51$

আমদের কাজ কমে গেল, এটি বের করলেই হবে কোন চারটি সংখ্যা যোগ করলে 51 হয়। এবার আমরা একটি মজার কাজ করি। 51 টি এক পরপর লিখে ফেলি, এবং একের মাঝে তিনটি লাঠি বসিয়ে যতভাবে আলাদা করতে পারি তাই হলো উত্তর !

বুঝলে না? ধর আমাদের 11 বানাতে হবে। 11 টি এক পরপর লিখে ফেলি, 11111111111. এবার তিনটি লাঠি দিয়ে এদের আলাদা করি, 111। 1111। 1111. একটি লাথির একপাশে তিনটি এক, মাঝে চারটি এক আর শেষে চারটি এক। এখন $3 + 4 + 4 = 11$.

এবার লাঠিগুলি এদিক অদিক সরালেই আমরা এক একটি বিন্যাস পেয়ে যাচ্ছি। এখন 51 টি এক এর কয় জায়গায় লাঠি বসাতে পারবো? 50 জায়গায়। তাহলে, 50 টি জায়গার ভিতর তিনটি জায়গা মোট বাছাই করতে পারি, $^{50}c_3 = 19600$ ভাবে।

সমস্যা 10 - হাতে রেখে যোগ

হাতে রেখে যোগ করতে তো আমাদের সব সময় ঝামেলা হয়। ধরা যাক 1000 থেকে 2000 এর ভিতরে দুইটি পরপর সংখ্যা নিলে। এবার যোগ করে দাও দুইটি। ঠিক কয়টি যোগের ক্ষেত্রে হাতে রেখে যোগ করতে হবে না বলতে পারো?

উত্তরঃ বলো তো হাতে রেখে যোগের ক্ষেত্রে উপর নিচে কত থাকা লাগবে? কমপক্ষে 5। এবার যেহেতু পরপর দুইটি সংখ্যার যোগ বের করতে বলেছে, তাই শেষ ডিজিটটি কখনোই 5, 6, 7, 8 হতে পারবে না। এবার তিন নাম্বার ডিজিট এ আশা যাক। এটি কী কী হতে পারবে? অবশ্যই 0, 1, 2, 3, 4. এমনিভাবে দ্বিতীয় আর শেষ ডিজিতের বেলায়ও একই কথা বলা যায়। এবার শুরুতে 1 রেখে বাদ বাকি তিনটি স্থান পূরণ করা যায় $5 \times 5 \times 5 = 125$ ভাবে।

হয়ে গেল? না, আমরা বলছি দ্বিতীয়, তৃতীয় বা চতুর্থ ডিজিট 5, 6, 7, 8 হতে পারবে না। কিন্তু 9 হলে? যদি সংখ্যাগুলি এ রকমের হয়? 1ab9, 1a99, 1999 তবে কি কোনো সমস্যা হবে? অবশ্যই না। এবার প্রথম রকমের ক্ষেত্রে সংখ্যা কয়টি? $5\times5 = 25$, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, 5 টি। তাহলে মোট হবে, $125+5+25+1 = 156$ টি।

সমস্যা 11 - দুই ভাগে সেট

ধরা যাক, কোনো এক সেটে 6টি সদস্য আছে। কতভাবে এদের দুইটি সেটে ভাগ করা যাবে, যেন এদের ইউনিয়ন সেট ঐ সেটটি হবে?

উত্তরঃ ধরা যাক ঐ সেটটি s আর এদের যে দুইটি সেটে ভাগ করতে হবে তা a এবং b। এখন ধরলাম s সেটের একটি সদস্য x, তাহলে x হয় a এর সদস্য হবে, অথবা b এর সদস্য হবে বা দুইটারই সদস্য হবে। এখন a আর b সেটটি বানানোর আমাদের কাছে 3^6 টি উপায় আছে। অবশ্য আমরা একটি বিষয় খেয়াল করিনি, এর ভিতর কোনো কোনো সেটের বেলায় $a = b$ হবে। সেগুলো আমরা দুইবার গুনে ফেলেছি।

এবার $a \cup b = s$, এখন $a = b$ হবে তখনই যখন $a = b = s$ হবে। তাহলে মোট উপসেট হবে, $\frac{3^6-1}{2} + 1 = 365$.

সমস্যা 12 - ধারা

1, 3, 4, 9, 10, 12, 13 এ ধারার যেকোনো পদ হয় 3 এর কোনো ঘাত, অথবা 3 এর বিভিন্ন ঘাতের যোগফল। এ ধারার 100 তম পদ কত?

উত্তরঃ যদি আমরা 3 এর 6 টি ঘাত নিয়ে আলোচনা করি, তাহলে মোট $2^6 - 1 = 63$ টি পদ পর্যন্ত যেতে পারি। তাহলে 3 এর 7 তম ঘাত অর্থাৎ 729 পযন্ত যাওয়া লাগবে। তো কী পেলাম, 64 তম পদ 729.

এরপর আমরা আর 3 এর 6 ঘাত নিয়ে আলোচনা করতে পারবো না। কারণ তখন, 64 + 63 = 127 তম পদ এ চলে যাবো ! তাই এবার 3 এর 5 তম ঘাত নিয়ে আলোচনা করলে আমরা আরো, 64 + 32 - 1 = 95 টা পদ পর্যন্ত যেতে পারি! আর মাত্র 5 টি পদ বের করা বাকি!

বাদ বাকি 5 টি পদ, 729 + 243, 729 + 243 + 1, 729 + 243 + 3, 729 + 243 + 3 + 1, 729 + 243 + 9 = 981

তাহলে আমাদের পদটি হলো 981।

সমস্যা 13 - লাইনে দাঁড়াও

7 জন বালক আর 13 জন বালিকা এক সারিতে এক লাইনে দাঁড়িয়েছে। ধরা যাক s হলো এমন একটি নাম্বার যা বুঝায় এ বালক বালিকাদের এক লাইনে দাঁড়ানোর এ বিন্যাসে কোনো কোনো জায়গায় এরা একদম পাশাপাশি আছে। যেমন gbbgggbgbgggbgbggbgg এ বিন্যাস এর কথা ধরা যাক। এতে মোট 12 জায়গায় বালক বালিকা পাশাপাশি আছে। কাজেই এ বিন্যাস এর ক্ষেত্রে s = 12, এরকম যতগুলি s পাওয়া সম্ভব তার গড় মান কত?

উত্তরঃ ধরলাম, জলিল আর কমলা এ বিশ জন বালক বালিকার ভিতর দুইজন। এখন i =1, 2, 3, ………, 19 এর জন্য j_iআর k_i হচ্ছে বিন্যাসের সংখ্যা যেখানে, জলিল আর কমলা অথবা কমলা আর জলিল পাশাপাশি আছে আর যেখানে i আর i+1 তম অবস্থানে এরা আছে। তাহলে আমরা এদের বাদে বাকিদের 18! ভাবে সাজাতে পারি।

সুতরাং $j_i = k_i = 18!$, এবার ধরা যাক i = 1, 2, 3, ……, 19 এর জন্য N_i হচ্ছে মোট বালক বালিকা অথবা বালিকা বালক জোড়ার সংখ্যা যারা i আর i+1 তম স্থান দখল করে। এখন আমাদের মোট 7 জন বালক আর 12 জন বালিকা আছে। এদের জন্য $N_i = 7.19.(18! + 18!)$

আমাদের মোট বিন্যাস হতে পারে 20! টি, তাহলে এর ভিতর মোট 19 টি N_i এর জন্য গড় হবে, $(N_1 + N_2 + \ldots\ldots\ldots. + N_{19})/20!$

$19 \times 7 \times 19 \times (18! + 18!)/20! = 91/10$

সমস্যা 14 - বিরক্ত জলিল

জলিলকে মাস্তানরা তাড়া করেছে আর ভয়ের চোটে ও একটা রুমে ঢুকে পড়লো। এখন তো রুম থেকে বের হতেও পারবে না। কী আর করা, হঠাৎ রুমে দেখলো মোট 1024 টি বাক্স আছে। 1 হতে শুরু করে নাম্বার দেয়া। বিরক্ত জলিল আর কী করবে, প্রথমে 1 নাম্বার বাক্সটি খুললো, 2 নাম্বারটার সাথে 1 নাম্বারটি বদল করে নিলো। এরপর 3 নাম্বারটি খুললো, 4 এর সাথে বদল করে করে নিলো। এভাবে ও শুরুতে একটি বাক্স খুললো, এবং এর পরের বন্ধ বাক্সের সাথে এর স্থান অদল বদল করে নিলো। এভাবে করে শেষ পর্যন্ত যাওয়ার পর ও আবার শুরুতে আসলো। আবার

আগের মতো শুরুর বন্ধ বাক্সটি খুললো, আর পরের বন্ধ বাক্সের সাথে বদল করে নিলো (এবার বন্ধ বাক্স নিশ্চয়ই পরেরটি হবে না!)। এভাবে করতে করতে সব কটি বাক্সই তো খোলা হয়ে যাবে। বলতে হবে, ও শেষ কোন বাক্সটি খুলেছিল? (1996 AIME)

উত্তরঃ ধরলাম শুরুতে 2kটি লকার ছিল, এবার প্রথমে জলিল অকাজ করার পর এবার 2k-1টি লকার থাকবে। যেগুলি বন্ধ আছে, এদের সবগুলিরই তো নাম্বার জোড় হবে, তাই নয় কি? আর জলিল প্রথম ধাপে এ অকাজ করার পর শেষে যে জায়গায় দাঁড়িয়ে আছে, সেই ক্ষেত্রে আর হাতের বামের বাক্সগুলির নাম্বার নিশ্চয়ই ক্রমানুযায়ি কমতে থাকবে (1024, 1022, 1020, এভাবে)

এখন প্রথমবার এ অকাজ করার পর জলিল যে জায়গায় দাঁড়িয়ে আছে সেই বাক্সটাকে 1 নাম্বার দিলো (আসলে 1024 ছিলো), পরেরটাকে 2 (1022) এভাবে দিতে থাকলো। জলিলের নাম্বারিংকে এভাবে লেখা যায় –

ধরা যাক, n হলো ঐ বাক্সের একদম শুরুর নাম্বার, তাহলে এখন এর নাম্বার হবে, $2^{k-1} + 1 - n/2$ (বিশ্বাস না হলে মিলিয়ে দেখ!)। ধরলাম, একদম শুরুতে যে বাক্সটি শেষে খোলা হয়েছিল, তা L_k, এখন নতুন নাম্বারিং করার ফলে তা হয়ে যাবে, L_{k-1},

এখন, $L_{k-1} = 2^k +1 - L_k /2$. আমাদের মোট বাক্স দেয়া আছে, 1024 মানে, 2^{10} টি।

এখন উপরের সমীকরণকে লেখা যায়, $L_k = 2^k + 2 - 2L_{k-1}$

বাহ, আমরা একটি রিকারশন সমীকরণ দাঁড় করিয়ে ফেলেছি। এবার এটাকে তোমরা সলভ করে ফেল। দুইটি বাপার বলে দেই, $L_0 = 1$, আর উত্তরটি হচ্ছে 342।

সমস্যা 15 - ভাজক সমস্যা

$N = 2^{31}.3^{19}$। এখন n^2এর কয়টি ভাজক আছে, যারা n এর চেয়ে ছোট কিন্তু n এর ভাজক নয়?

উত্তরঃ n এর মোট ভাজক কয়টি, (31 + 1) × (19 + 1) টি (প্রথম অধ্যায়ে দেখ)। এবার $n^2 = 2^{62}.3^{38}$,

তাহলে, n^2 এর উৎপাদক হবে, (62 + 1) × (38 + 1) টি। = 2457

এ উৎপাদকগুলির ভিতর একটি n এর ছোট হলে আরেকটি n এর বড় হবে। অর্থাৎ মোট অর্ধেক পাবো যারা n হতে ছোট, কিন্তু একটি বাদে, সেটি হলো n যেটি n এর সমান! (বোঝনি? ধরা যাক, 36 = 1 × 36 = 2 × 18 = 3 × 12 = 4 × 9 = 6 × 6

এবার 1, 2, 3, 4 ছোট, কিন্তু 6? এটাই আমরা বাদ দিলাম!) তাহলে n এর থেকে ছোট উৎপাদকগুলি হলো (2457 - 1)/2 = 1228 টি। আচ্ছা এর ভিতর তো কিছু n এর উৎপাদকও আছে, কতগুলি?

(31 + 1) × (19 + 1) = 640 টি। তাহলে n এর উৎপাদক বাদে উৎপাদক হবে, 1228 - 640 = 588.

শেষ? না, এর সাথে একটি এক যোগ করতে হবে (কেন?)। তাহলে মোট উৎপাদক 589 টি।

সমস্যা 16 - বসাবসি

একটি হল ঘরে কিছু চেয়ার কয়েকটি সারিতে সাজানো আছে। প্রতি সারিতে 199 টি করে চেয়ার আছে। একদিন হল ঘরে নাটক হবে, তো বিভিন্ন স্কুল হতে কিছু ছাত্র আসলো দেখতে। এটি জানা আছে যে প্রতি স্কুল হতে বড়জোর 39 জন আসছে আর এক স্কুলের সবাইকে এক সারিতে বসতে হবে। এ নিয়ম থাকে, তবে সর্বনিম্ন কতসারি চেয়ার থাকবে ঐ হল ঘরে?

উত্তরঃ আমাদের 199 নিয়ে কাজ করতে সমস্যা হবে। কেননা এটি একটি প্রাইম। তাই ধরে নিলাম প্রতি সারিতে চেয়ার আছে 200 টি। আর দুইশ এর 39 এর চেয়ে ছোট সবচেয়ে বড় ভাজক হচ্ছে 25। এখন, $1990 = 79 \times 25 + 15$. ধরা যাক মোট 80 টি স্কুল আছে, আর এর ভিতর 79 টি স্কুল 25 জন করে আর শেষ স্কুল 15 জন করে ছাত্র পাঠিয়েছে।

এবার একটি কাজ করা যাক, প্রথম দশ সারিতে আমরা স্কুল হিসাবে ছাত্রদের ঘাড় ধরে বসাতে থাকি! (অনেকে আপত্তি করতে পারে, কারণও আছে। কেননা এক সারিতে সব স্কুলের ছাত্র আঁটবে না, পরের সারিতে ঐ স্কুলের বাকি ছাত্রদের বসাতে হবে)। সমস্যা নাই, এরকম মোট 9টি স্কুলের বেলায় এটি হবে। তাই এবার আরেকটা কাজ করি, এ নয়টি স্কুলের ছাত্রদের ঘাড় ধরে উঠিয়ে নিয়ে এসে পরের দুই সারিতে বসিয়ে দেই। (এটাও সম্ভব, কারণ প্রতি সারিতে বড়জোর 5 টি স্কুল বসতে পারে (কেন? $5 \times 39 = 195$)

তাহলে মোট সারি দাড়ালো $10 + 2 = 12$ টি।

সমস্যা 17 - 9 এর ধারা

ধরা যাক, কোনো একটি সেট $\{1, 9, 81, \ldots\ldots\ldots\ldots, 9^{4000}\}$। এটি জানা আছে যে, 9^{4000}এ মোট 3817 টি ডিজিট আছে আর এর একদম বামের ডিজিটটি হচ্ছে 9। বলতে হবে এ সেটের কয়টি সদস্য আছে যাদের শুরু হয় 9 দিয়ে।

উত্তরঃ একটি ব্যাপার দেখে নেই। 9 এর কোনো পাওয়ার 9 দিয়ে শুরু, এর আগের পাওয়ার কত দিয়ে শুরু হবে? অবশ্যই এক দিয়ে, আর বলো তো দুইটার ক্ষেত্রে কি একই ডিজিট থাকবে প্রতি সংখ্যায়? অবশ্যই।

এবার যদি 9 এর কোনো পাওয়ার 9 দিয়ে শুরু না হয়, তবে? তাহলে কিন্তু এর আগের পাওয়ারের ডিজিটের তুলনায় এক কম হবে (কেন?)। এখন বলা আছে, 9^{4000} এর মোট ডিজিট হচ্ছে 3817 টি। এর মানে দাঁড়াচ্ছে 1 হতে 9^{4000} পর্যন্ত মোট 3816 বার বৃদ্ধি ঘটেছে। এবার বৃদ্ধি ঘটার মানে হলো ঐখানে 9 নাই।

তাহলে মোট 9 আছে $(4000 - 3816) = 184$ টি নাম্বারের শুরুতে।

সমস্যা 18 - চকলেট সমস্যা

একটি রুমের ভিতর কতগুলি বাক্স আছে (ধরা যাক n টি আর n, 4 এর বড় বা সমান)। বাক্সগুলিতে কমপক্ষে চারটি চকলেট আছে। এবার আবুল হুড়মূড় করে রুমে ঢুকে পড়লো, সে দুইটি বাক্স হতে একটি একটি চকলেট তুললো। এরপর তৃতীয় কোনো এক বাক্সে রেখে দিলো। এভাবে সে বারবার এ অকাজটি করতে থাকলো। এবার প্রমাণ করতে হবে যে, আবুল যদি এভাবে কাজ করতে থাকে তাহলে তার পক্ষে সব সময়ই একটি বাক্সে এ চকলেটের সবগুলিই রাখা সম্ভব।

উত্তরঃ প্রমাণ দাঁড় করাতে বলছে। আবার বলেও দিলো, কোন ভাবে করলে ভালো হয়। অবশ্যই ইনডাকশন দিয়ে। তো এখন এর বেস কেস কত ধরা যায়? আচ্ছা ধরে নিলাম m হলো চকলেট সংখ্যা। তাহলে, m = 4 থেকেই তো শুরু করতে হবে নাকি? এবার চকলেট সংখ্যা চারটি হলে, আমরা বড়জোর চারটি ভরা বাক্স আর বাকি সব খালি বাক্স পাবো।

এদের জন্য কীরকম বিন্যাস হতে পারে,
(1, 1, 1, 1)
(1, 2, 1, 0)
(2, 2, 0, 0)
(1, 3, 0, 0)

এখন প্রথম বিন্যাসের জন্য আমরা কি একে এক বাক্সে ভরতে পারি? অবশ্যই।

(1, 1, 1, 1) ------ (3, 1, 0, 0) ------ (2, 0, 2, 0) ------ (1, 0, 1, 2) -------- (0, 0, 0, 4)

এভাবে বাদ বাকি সব বিন্যাস এর ক্ষেত্রেও এটি দেখানো সম্ভব। অর্থাৎ m = 4 এর জন্য এ বিষয়টি সত্য হবে। এবার ধরা যাক, m = n এর জন্যও এ বিষয়টি সত্য হবে। এখন m = n + 1 এর পালা।

আমরা এ n+1 টি চকলেটের একটাকে বিশেষ চকলেট বললাম, আর এটি বাদ দিয়ে দিলাম। বাকি n টি চকলেটকে তো অবশ্যই একটি বাক্সে রাখা যাবে। এখন আমাদের ঐ বিশেষ চকলেটটি যদি ঐ বাক্সটাতে থাকে, তবে তো প্রমাণ হয়েই গেল। আর যদি না থাকে, তবেও চিন্তা নেই। ধরলাম ঐ চকলেটটি আরেকটি বাক্সে আছে, এবার আমরা দুইটি খালি বাক্স নিয়ে নিচের কাজটি চালাই,

(1, m, 0, 0) ----- (0, m-1, 2, 0) ----- (0, m-2, 1, 2) ---- (2, m-3, 0, 2) ----- (1, m-1, 0, 1) ----- (0, m+1, 0, 0)

ব্যাস, আমাদের প্রমাণ হয়ে গেল।

সমস্যা 19 - সেট আর সাবসেট

ধরা যাক, কোনো একটি সেট s এর কোনো সদস্যই 15 এর চেয়ে বড় নয়। আর সকল সদস্যই ধনাত্মক। এবার ধরা যাক, এর কোনো ডিস জয়েন্ট উপসেটের

সদস্যগুলির যোগফলই সমান নয়। এখন এ শর্ত অনুসারে, s সেটের সদস্যগুলির যোগফল সর্বোচ্চ কত হতে পারে?

উত্তরঃ আমরা শুরুতে এটি দেখাবো যে, s সেটে কমপক্ষে পাঁচটি সদস্য থাকবেই। কীভাবে?

ধরি সদস্য সংখ্যা চার, তাহলে বলো তো কয়টা উপসেট থাকবে? $^6c_1 + ^6c_2 + ^6c_3 + ^6c_4 = 56$ টি। এসব সেটগুলির ভিতর সর্বোচ্চ যোগফলওয়ালা সেটের ঐ যোগফলটি কত কত হবে?

{15, 14, 13, 12} এ সেটের যোগফল অর্থাৎ 54। তাহলে পিজিওন হোল থিওরি অনুসারে অবশ্যই কোনো দুইটি সেটের যোগফল একই হবে, যা সম্ভব নয় (আচ্ছা এদের কোনোটি তো ডিস জয়েন্ট নাও হতে পারে, তখন?)। তাহলে বোঝা যাচ্ছে, কমপক্ষে পাঁচটি সদস্য থাকবে।

ধরা যাক এ পাঁচটি সদস্য $a < b < c < d < e$. এখন $d + e <= 29$ (যদি $e = 15$, $d = 14$)। তাহলে $c <= 13$ হবে, (d এর চেয়ে ছোট)। এখন $^5c_2 = 10$, মানে এ সেটের দুই সদস্য বিশিষ্ট সেট হতে পারে 10 টি।

তাহলে, $a + b <= d + e + 1 - 10$
বা, $a + b <= 29 - 9$ বা 20.
সেক্ষেত্রে, $a + b + c + d + e <= 20 + 13 + 29$ বা 62

এবার ধরলাম, $c <= 12$, সেক্ষেত্রে, এ যোগফলটি <= 61 হবে।
যদি $c = 13$ হয়ে বসে, তাহলে $d =14$ আর $e =15$ হবে।
তখন যোগফল <= $a + b + 42$ হয়ে যাবে।

এবার $b = 12$ বলা যাবে? না, কারণ $12 + 15 = 13 + 14$ এ দুইটি সেট তো শর্ত মানে না। তাহলে $b<= 11$, $b = 11$ ধরলে আমরা কি $a = 10$ ধরতে পারবো?

না, কারণ $10 + 15 = 11 + 14$, তাহলে $a = 9$?

এবারো সম্ভব না, কেননা $9 + 15 = 11 + 13$, তাহলে, $a <= 8$ হবে। তখন যোগফল দাঁড়ায় <= $8 + 11 + 42 = 61$

এবার ধরলাম, $b <= 10$, সেক্ষেত্রে, $a + b <= 19$ ($a <= 9$)। এবারো যোফগল <= $19 + 42$ বা 61.

তাহলে আমাদের যোফফল্টা হবে 61.

সমস্যা 20 - গড়ের গড়গড়ি

ধরা যাক, 1 হতে শুরু করে 1000 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি একটি সারিতে লেখা আছে। কিন্তু ক্রম অনুযায়ি নয়, এবার এটি কি প্রমাণ করতে পারবে, এদের এমনভাবে সাজানো

যাবে যেন যেকোনো দুইটি সংখ্যা এদের ভিতর থেকে উঠিয়ে নিলে এদের গড় মধ্যবর্তী বাকি সংখ্যাগুলির ভিতর থাকবে না?

উত্তরঃ আমরা এটাও গাণিতিক আরোহ দিয়ে প্রমাণ করবো। শুরুতে আমরা একটি কাজ করবো, ধরে নিলাম 1000 টি পদের কথা বলা হয়নি, বরং 2^m টি পদের কথা বলা হয়েছে। আমরা 2^m এর জন্য ব্যাপারটি প্রমাণ করবো।

আচ্ছা m=1 এর জন্য ব্যাপারটি সত্য? অবশ্যই! এবার ধরে নিলাম, m এর কিছু পজিটিভ মানের জন্য বিষয়টি সত্য।

অর্থাৎ m এর কিছু মানের জন্য 1, 2, 3, ……….., 2^m এদেরকে এমনভাবে সাজানো যাবে যেন দুইটি সংখ্যা নিলে গড় এর ভিতরের সংখ্যা না হয়। ধরা যাক, এ সাজানোটি হচ্ছে $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_{2^m})$

এবার আমাদের দেখাতে হবে, m = m + 1 এর জন্যও ব্যাপারটি সত্য। এখন m+1 এর বেলায় আমরা একটি বিন্যাস কল্পনা করি এভাবে, $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_{2^{m+1}})$। আমরা এ বিন্যাসটা কি এভাবে লিখতে পারি না?

$(2a_1 -1, 2a_2 -1, \ldots \ldots\ldots, 2a_{2^m}, 2a_1, 2a_2, \ldots\ldots\ldots, 2a_{2^m})$

অবশ্যই পারি, এখন আমরা ধরে নিলাম এর ভিতর থেকে যে দুইটি সংখ্যা নিবো, তারা b_i, b_j, এখন, যদি $i < j$ হয় আর $1 <= i < j <= 2^m$ হয়, অথবা $2^m + 1 <= i <= j <= 2^{m+1}$ হয় তবে তো আমাদের প্রমাণ হয়েই যায় (কেন?)। আর যদি এরকম হয়, $1 <= i <= 2^m <= j <= 2^{m+1}$ তবে কিন্তু সংখ্যা দুইটার গড় পূর্ণ সংখ্যা হয় না।

তাহলে আমাদের প্রমাণ শেষ। দাঁড়াও দাঁড়াও কেউ কেউ বলছ কীভাবে? আমরা তো 2^m এর জন্য দেখালাম, কিন্তু দেখাতে বলছে তো 1000 এর জন্য?

আচ্ছা, আমরা কি জানি 1024 > 1000। এখন বাকি 24 টি পদ বাদ দিয়ে দাও, কেল্লা ফতে!

সমস্যা 21 - পার্টি সমস্যা

একটি পার্টিতে 2n জন লোক আছে, প্রত্যেক লোকের জোড় সংখ্যক বন্ধু আছে পার্টিতে। দেখাতে হবে যে, পার্টিতে এমন দুই জন লোক আছে, যাদের জোড় সংখ্যক কমন বন্ধু আছে।

উত্তরঃ আমরা কনট্রাডিকশন দিয়ে এটি প্রমাণ করতে পারি। ধরা যাক, পার্টির প্রতি দুই জনের বিজোড় সংখ্যক কমন বন্ধু আছে। ধরলাম, পার্টির একজন হচ্ছে আবুল, তার a সংখ্যক বন্ধু আছে। আর বাকিদের মোট মিলিয়ে b সখ্যক বন্ধু আছে। এখন a তো অবশ্যই জোড় হবে। সেক্ষেত্রে b হবে বিজোড়, কেননা মোট লোকের সংখ্যা 2n। ধরলাম কাবুল এ বিজোড় লোকদের ভিতর একজন। তার মানে দাঁড়াচ্ছে কাবুল আবুলের বন্ধু না। এখন আমরা আগেই বলেছি, প্রতি দুই জনের বিজোড় কমন বন্ধু আছে। তাই কিছু বিজোড় সংখ্যক লোক আছে যারা কাবুল আবুল দুই জন ই বন্ধু।

আর বোঝাই যাচ্ছে এরা a এর ভিতর থাকবে। এখন যেহেতু কাবুলেরও মোট জোড় সংখ্যক বন্ধু থাকবে, তাই তার কিছু বেজোড় বন্ধু থাকবে b এর ভিতর।

এবার আমরা বলেছি, b এর ভিতর একজন কাবুল, ধরলাম বাকিরা বাবুল, গাবুল......। তাহলে এদের প্রত্যেকের b এর ভিতর বিজোড় সংখ্যক বন্ধু থাকবে। এবার এসব বন্ধুদের যোগ করে দেই, তাহলে নিশ্চয়ই মোট দুইবার সবার বন্ধু যোগ হয়ে যাবার কথা, অর্থাৎ b হবে জোড়। কিন্তু আমরা শুরুতেই বলেছি, b বিজোড়। অর্থাৎ আমাদের শুরুর ধারণা খাটলো না। বাকিটি বলে দিতে হবে?

সমস্যা 22 - বর্গ আর +1 -1

ধরা যাক 4×4 দাগ টেনে মোট 16 টি বর্গ বানানো হলো। এবার প্রতি সারি বা কলামে কেবল 1 বা -1 এমনভাবে বসানো হলো, যেন প্রতি সারি বা প্রতি কলামের যোগফল 0 হয়। এরকম কতটি বিন্যাস সম্ভব?

উত্তরঃ এটি তো বুঝতে পারছ প্রতি সারিতে দুইটি মাইনাস আর দুইটি প্লাস থাকবেই। এবার প্রথম সারি এ শর্তের সাপেক্ষে কতভাবে পূর্ণ করা যায়? অবশ্যই 4c2 = 6 ভাবে।

এবার তাহলে দ্বিতীয় সারিও 6 ভাবে পূর্ণ করা যাবে। এর ভিতর একটি বিন্যাস উপরের সারির সাথে হুবুহু মিলে যাবে। একটি বিন্যাস উপরের সারির সাথে মোটেই মিল্বে না। আর বাকি চারটি বিন্যাসের কেবল দুই জায়গায় উপরের সারির সাথে মিলবে।

এখন প্রথম বিন্যাসের জন্য নিচের তিন নাম্বার সারিকে একভাবে পূর্ণ করা যায়। দ্বিতীয় বিন্যাসের জন্য নিচের সারিকে দুইভাবে পূর্ণ করা যায়। আর শেষ বিন্যাসের জন্য নিচের সারিকে 6 ভাবে পূর্ণ করা যায়। বাকি থাকলো চতুর্থ সারি। যখন আমরা প্রথম তিনটি সারিকে পূর্ণ করে ফেলছি তখনো বেচারার জন্য একটি বিন্যাসই বরাদ্দ থাকে। তাহলে মোট 6 × (1 × 1 + 4 × 2 + 1 × 6) বা 90 ভাবে এ বর্গটি পূর্ণ করা যেতে পারে।

সমস্যা 23 - সেট আর সাবসেট

কোনো একটি সেট {1, 2, 3, ………, n}. এবার এ সেটের সকল সাবসেটকে বের করা হলো। এরপর এ সকল সাবসেটের সদস্যগুলিকে বড় থেকে ছোট আকারে লেখা হলো। তারপর প্রথম সদস্যের আগে + পরেরটার আগে – এভাবে বসানো হলো। এখন এদের যোগ করলে তো একটি যোগফল পাওয়া যাবে নাকি?

যেমন ধরা যাক, কোনো একটি সাবসেট হলো{9, 4, 3, 2}। এখন {9 - 4 + 3 - 2} এর সদস্যগুলিকে যোগ করলে পাই 6. ধরা যাক, n= 7 তাহলে এরকম সাবসেটগুলিতে যতগুলি যোগফল পাওয়া যাবে এদের যোগ করে দিলে মোট যোগফল কত হবে?

উত্তরঃ বলো তো {1, 2, 3, ………, n}. এ সেটের উপসেট কয়টি?

অবশ্যই 2^n টি (আমরা ফাঁকা সেটকেও সদস্য ধরে নিলাম। কারণ একটু পড়ে দেখি)। এবার আমরা এ সাবসেটগুলিকে মোট দুই ভাগে ভাগ করতে পারি, যার অর্ধেকে n আছে আর অর্ধেক n নেই। (এটি দেখানো খুব কঠিন না যে আমরা মোট অর্ধেকই পাবো, তোমরা একটু ভাবো কীভাবে দেখানো যেতে পারে!)

যা হোক এ সেটগুলিকে আমরা মোট দুই দুইটি জোড়া করে নিচের মতো করে সাজাতে পারি,

∅,	{n}
{a, b,c}	{n,a,b,c} [a>b>c}
{a,b,c,d}	{n,a,b,c,d} [a>b>c>d]

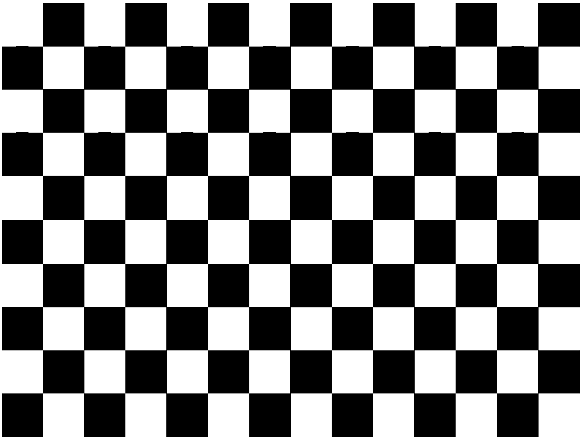
মানে মোটামুটি কোনো একটি সেট বানাবো, এর আগে n যোগ করে দিয়ে আরেকটি সেট বানাবো এভাবে। এবার প্রথম দুইটি জোড়ায় আমরা মাইনাস প্লাস বসিয়ে মোট যোগফল কত পাই? n.

পরেরটায়? একই n. তার পরেরটায়? এটাতেও n. এখন মোট 2^{n-1} টি জোড়া হতে পারে, আর প্রতি জোড়ার যোগফল হচ্ছে n.
তাহলে মোট যোগফল nx 2^{n-1}. যেহেতু n = 7 তাই মোট যোগফল 448.

সমস্যা 24 - দাবার কোর্ট

একটি 1998×2002 দাবার কোর্ট আছে। এর প্রতিটি বর্গে হয় 0 অথবা 1 লেখা আছে এমনভাবে যে, প্রতি সারি আর প্রতি কলামে যতগুলি বর্গের ভিতর 1 লেখা আছে সেই সকল বর্গের মোট সংখ্যা হচ্ছে জোড় (মানে প্রতি সারিতে চারটি বর্গের ভিতর 1 লেখা আছে। এরকম আর কি!)

উত্তরঃ এটি কি দেখাতে পারবে, যেসব সাদা বর্গে 1 লেখা আছে, তাদের মোট সংখ্যা জোড়?



আমরা আমাদের কাজের সুবিধার জন্য ধরে নিলাম কোর্টটি 10×14 আকারের। এবার একে ফেললাম আর তোমাদের কাজ হলো আমি যা যা বলবো তা মিলিয়ে দেখা।

ধরে নিলাম, বিজোড় সারির বর্গগুলির ভিতরের সংখ্যার যোগফল r. স্বভাবতই মোট 5 টি সারির যোগফল বের করতে হবে। আর আমরা জানি প্রতি সারির সংখ্যাগুলি যোগ করলে বিজোড় যোগফল পাওয়া যাবে, তাই r হবে পাঁচটি বিজোরের যোগফল মানে বিজোড়।

এবার ধরলাম, জোড় কলামের যোগফল c, স্বভাবতই মোট 7 টি জোড় সারি পাওয়া যাবে। তাই আগের মতো এদের বেলাতেও মোট যোগফল বিজোড় হবে। এখন ধরে নিলাম জোড় কলামে যতগুলি কালো ঘর আছে, তাদের সংখ্যাগুলির যোগফল b. ছবি হতে এটি পরিস্কার যে, b এর সংখ্যাগুলি r এর ভিতর একবার আর c এর ভিতর একবার আছে।

মোট সাদা ঘরগুলির যোগফল, $(r + c)$ এর ভিতর আছে আর $(r + c)$ এর ভিতর জোড় কালো ঘরগুলির যোগফল দুইবার করে আছে। তাহলে মোট সাদা ঘরের সংখ্যার যোগফল হবে $(r + c) - 2b$, যা জোড় সংখ্যা। ব্যাস 10×14 এর বেলায় প্রমাণ হয়ে গেল।

সমস্যা 25 - আবার সেট

S হলো {1, 2, 3, 4, …….., 1989} এ সেটের একটি সাবসেট। এটা জানা আছে যে, s এর কোনো দুইটি সদস্যের পার্থক্য 4 or 7 নয়। এখন বলতে হবে, s সেটে সবচেয়ে বেশি কতগুলি সদস্য থাকতে পারে?

উত্তরঃ আমরা শুরুতে এটি দেখাবো যে, আমরা এ সেটটি হতে যদি পরপর 11 টি সংখ্যা নেই, তবে এর ভিতর এমন পাঁচটি সদস্য পাবো, যারা s সেটের ভিতর থাকবে। দেখানোটি খুব কঠিন নয়। আমরা শুরুর এগারোটি সংখ্যা নিয়ে দেখাই আগে।

ধরা যাক, t = {1, 2, 3, 4……..,11}, এবার এ সদস্যগুলিকে আমরা ভাগ করি এভাবে,

{1, 5}   {2, 9}   {3,7}   {4, 11}   {6, 10}   {8}

এখন আমরা এ উপসেটগুলি থেকে যেকোনো একটি তুলে নিলেই তো হয়ে গেল। না, একটু প্যাঁচ আছে। আমরা 1 নিলাম। কিন্তু এবার তাহলে 8(8 - 1 = 7) নিতে পারবো না। পরেরটি থেকে 9 নিলাম (কারণ, 9 - 5 = 4, তাই আমরা বেঁচে যাবো)। পরেরটি থেকে 3 নিলাম, তাহলে {6, 10} এ সেট হতে 6 নিতে হবে (10 – 3 = 7)। আর {4, 11} এ সেট হতে 4 নিবো (কেন?)

যা হোক আমরা পাঁচটি সদস্যের সেট পেলাম আর তা হলো {1, 9, 3, 6, 4}। একে একটু সাজিয়ে গুছিয়ে লেখি t = {1, 3, 4, 6, 9}

এবার আমরা খুব অদ্ভুত ব্যাপার দেখব। ঠিক 11 টি সংখ্যার পরপর এ ধর্মটি পাওয়া যায়। আমরা ঠিক পরে এরকম যে সেটটি পাবো তা হলো {12, 14, 15, 17, 20}। এবার দুইটাকে এক সেটের ভিতর নিয়ে আসলে তো কোনো সমস্যা নেই, ঐ সেটও একই ধর্ম দেখাবে। এভাবে আমরা মোট কয়টি সেট রাখতে পারি?

প্রতিটার ক্ষেত্রে শেষ পদ 9, 20, 31, ………. এরকম কত পর্যন্ত যাওয়া যায়?

ধারার সূত্র থেকে $1989 = 9 + (n - 1)\times 11$, অথবা $n = 181$.

তাহলে কী দাড়ালো? মোট 181 টি সেট রাখতে পারবো, আর প্রতি সেট এ পাঁচটি সদস্য। মোট সদস্য দাঁড়ায় তাহলে, $181\times 5 = 905$ টি।

এক চিমটি সমস্যা

এতক্ষণ আমরা বিন্যাস সমাবেশ নিয়ে অনেক কথাই শিখলাম। এবার কিছু অনুশীলনী দেয়া যাক। এখানে যে সমস্যাগুলি দেয়া আছে সেগুলি সমাধান করে পাঠিয়ে দিতে পারো। অবশ্যই ব্যাখ্যা সহ। তোমাদের উত্তরগুলি থেকেই আসবে কম্বিনেটরিক্সের পরের বইটি। পাঠানোর উপায় প্রথমে বলা আছে। (আমরাও কিন্তু দুই একটি প্রশ্নের সমাধান করে দিয়েছি।)

১। মনে করো এক স্থানে n জন লোক আছে যারা প্রত্যেকেই মাত্র একটি তথ্য জানে। এবং প্রত্যেক তথ্যই আলাদা আলাদা। এ n জনের মধ্যে A আর B দুই জন সদস্য। A যদি B কে ফোন করে তাহলে A যা জানে তা সবকিছু B কে বলে দেয়, কিন্তু B কিছুই বলে না। এর ফলে B এখন 2 টি তথ্য জানে। এভাবে চলতে থাকলে সর্বনিম্ন কতটি ফোনকলের পর সবাই সব তথ্য জানবে? দেখাও তোমার উত্তরই সর্বনিম্ন ফোনকল। (1971Canadian MO)

২। সম্রাট আকবরের আস্তাবলে 25টি ঘোড়া বৃত্তাকারে বাঁধা আছে। এর মধ্যে 3টি ঘোড়া নিয়ে বীরবল, আকবর আর তানসেন ঘুড়তে গেলো। p এমন একটি সম্ভাবনা, যা নির্দেশ করে ঐ ঘোড়াগুলি আস্তাবলের পাশাপাশি 2 বা তিনটি ঘোড়া। $p = m/n$ যেখানে m ও n সহমৌলিক।। $m + n$ এর মান কত? (1983 AIME)

৩। $\binom{200}{100}$ এর দুই অংকের সর্বোচ্চ মৌলিক উৎপাদক কত? (AIME 1983)

৪। 1447,1005,1231 এ চার অংকের সংখ্যাগুলির মধ্যে দারুন একটি মিল দেখতে পাওয়া যায়। এদের প্রত্যেকের শুরু হয়েছে 1 দিয়ে আর যেকোনো একটি অংক দুবার আছে। বলতে হবে এ ধরনের সংখ্যা কয়টি। (1983 AIME)

৫। {1,2,3,…,n} এ সেটের যেকোনো উপসেট নিয়ে বড় থেকে ছোট আকারে সাজানো হলো। এরপর পর্যায়ক্রমে বিয়োগ আর যোগ করা হল। যেমন {1,2,4,6,9} এর জন্য 9 – 6 + 4 – 2 + 1 = 6 .আর এক সদস্যের সেটের জন্য কোনো অপারেশন চালানো হয় না। এখন আমাদের n = 7 হলে এর সবগুলি উপসেটে এ অপারেশন চালানোর পর যোগ করা হয়। সেই যোগফল কত? (1983 AIME)

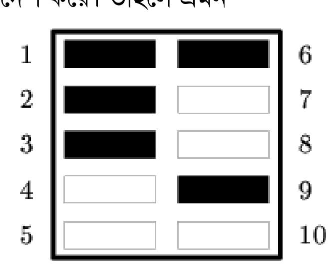
৬। এক মালী তার বাগানে 3টি আম, 4টি জাম আর 5টি কাঁঠাল গাছ লাগালেন। p হলো এমন সম্ভাবনা যাতে কোনো কাঁঠাল গাছ পাশাপাশি না থাকার সম্ভাবনা। p = m/n যেখানে m ও n সহমৌলিক। m + n এর মান কত? (1984 AIME)

৭। একটি দাবা খেলার টুর্নামেন্টে জিতলে 2 পয়েন্ট হারলে 0 আর ড্র করলে দুজনেই 1/2 করে পাবে। যখন টুর্নামেন্ট শেষ হলো তখন দেখা গেলো শেষ সকল প্রতিযোগী সবচেয়ে শেষের 10 জনের কাছ থেকে তার মোট পয়েন্টের অর্ধেক লাভ করেছে। (শেষ দশজন তার পয়েন্টের অর্ধেক পেয়েছে বাকি 9 জনের কাছ থেকে খেলাধুলার মাধ্যমে)। টুর্নামেন্টে মোট খেলোয়াড় কতজন? (1986 AIME)

৮। কোনো একটি সেট s আর এর কোনো সদস্যই 15 এর চেয়ে বড় নয়। আর সকল সদস্যই ধনাত্মক। এবার ধরা যাক, এর আলাদা আলাদা উপসেটগুলির সদস্যগুলির যোগফলই সমান নয়। এখন এ শর্ত অনুসারে, s সেটের সদস্যগুলির যোগফল সর্বোচ্চ কত হতে পারে? (1986 AIME)

৯। একজন বালক কয়েন নিয়ে টস করে যাচ্ছে আর হেড আর টেলের সিরিয়াল লিখে রাখছে। যেমন পনেরটি কয়েন টসের ফলাফল T T T H H T H T T T H H T T H। এবার সে খেয়াল করলো এখানে দুইটি HH, তিনটি HT চারটি TH আর পাঁচটি TT এর সিরিয়াল আছে। প্রশ্ন হলো 15টি কয়েন টস করা হলে কতটি সিরিয়াল আছে যাতে দুইটি HH, তিনটি HT চারটি TH আর পাঁচটি TT আসা সম্ভব। (1986 AIME)

১০। মনে করা যাক [p, q] দিয়ে p ও q এর লসাগু নির্দেশ করে। তাহলে এমন কতগুলি (a, b, c) বিদ্যমান যাতে [a, b] = 1000, [b, c] = 2000, [c, a] = 2000 সত্য হয়। (1987 AIME)



১১। একটি তালা কোম্পানির লোক নতুন এক ধরনের তালা ডিজাইন করলো যেখানে যে লোক তালা লক করবে যেন পাঁচটি বাটন ঠিক করে যাবে সে বাটনগুলি যেকোনো ক্রমে আবার কেউ চাপ দিলে দরজা খুলে যাবে। নিচে {1, 2, 3, 6, 9} এর জন্য একটি লক ডিজাইন দেখানো

হলো। পরবর্তীতে তালা কোম্পানি তালাকে আর একটু উন্নত করলো এখানে পাঁচটি বাটন নয় বরং 10 এর চেয়ে কম যেকোনো সংখ্যক বাটনের মাধ্যমে দরজা লক করা যাবে। প্রশ্ন হলো এতে নতুন কতগুলি কম্বিনেশনে দরজা লক হবে। (1988 AIME)

১২। দুই দেশের 5 জন করে 2টি দলের লোক দৌড় প্রতিযোগিতায় অংশ নেয়। তাতে সে যততম পজিশন অর্জন করে সে তার দলকে তত পয়েন্ট দান করে। যদি কেউ কারো সাথে ড্র না করে তাহলে দুই দলের মাঝে কত রকমের পয়েন্ট ব্যবধান হওয়া সম্ভব? (1989 AHSME)

১৩। S এম মান বের কর (1989 AHSME)

$$S=\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}=\binom{99}{0}-\binom{99}{2}+\binom{99}{4}-\cdots-\binom{99}{98}?$$

১৪। একটি বৃত্তের উপর দশটি বিন্দু চিহ্নিত করা হলো, এ বিন্দুগুলি যোগ করে কতগুলি বহুভুজ বানানো সম্ভব (ত্রিভুজ বা তার বেশি ভুজ)। (1989 AIME)

১৫। একটি ত্রুটিপূর্ণ পয়সা 5 বার টস করা হলো। এখানে দেখা গেলো একবার হেড পড়ার সম্ভাবনা যা, দুই বার পড়ার সম্ভাবনাও তাই আর সেটি 0 নয়। তাহলে ঐ 5 বারের মধ্যে ঠিক 3 বার হেড আসার সম্ভাবনা i/j. যেখানে I আর j সর্বনিম্ন আকারে প্রকাশ করা হয়েছে। i + j এর মান কত? (1989 AIME)

১৬। মনে করা যাক একটি সেট {1, 2, 3, … … 1989} S এ সেটের এমন একটি উপসেট যাতে যেকোনো দুইটি উপাদানের মধ্যে 4 বা 7 ব্যবধান নেই। S এর মধ্যে সর্বোচ্চ কতগুলি উপাদান থাকতে পারে? (1989 AIME)

১৭। একজন বায়োলজি গবেষক একটি লেকে মাছের পরিমাণ জানতে চাচ্ছিলেন। এজন্য তিনি মে মাসের 1 তারিখ 60 টি মাছ ধরলেন এবং চিহ্নিত করে রাখলেন। সেপ্টেবরের 1 তারিখ তিনি আবার 70 টি মাছ ধরলেন এবং দেখলেন তার মধ্যে তিনটি মাছ চিহ্নিত করা। তিনি ধরে নিলেন 25 % মাছ আর এ লেকে নেই (হয় মারা গেছে বা তাদের ধরে ফেলা হয়েছে)। আর 40% মাছ নতুন এসেছে (জন্ম নিয়েছে বা তাদের পুকুরে ছাড়া হয়েছে)। এভাবে এরপর চিহ্নিত করা মাছগুলি দিয়েই তিনি মাছের সংখ্যা মাপলেন। বলতে হবে তিনি মাছের সংখ্যা কত মেপেছিলেন? (1990 AIME)

১৮। একটি শুটিং প্রতিযোগিতায় 8টি বেলুন রাখা আছে যা তিনটি কলামে সাজানো। একটি কলামে 2 টি অপর দুইটি তে 3টি করে। কোনো শুটারকে শুট করতে হলে প্রথমে তাকে একটি কলাম বেছে নিতে হবে এর পর শবার নিচেরটি শ্যুট করতে হবে। প্রশ্ন হলো কত ভাবে একজন শুটার সবগুলি বেলুন ফাটাতে পারবেন? (1990 AIME)

১৯। একটি ড্রয়ারে সর্বোচ্চ 1991 টি মোজা আছে। যা লাল আর নীল মিলিয়ে বিদ্যমান। পুনস্থাপন না করে পর পর দুইটি মোজা তোলা হলে দুইটাই লাল বা

দুইটাই নীল হবার সম্ভাবনা .5। ঐ ড্রয়ারে সর্বোচ্চ কতটি লাল মোজা থাকতে পারে? (1991 AIME)

২০। প্যাসকেলের ত্রিভুজে যেকোনো মান তার উপরের দুইটি মানের যোগফল। বলতে হবে এমন কোনো সারি (row) আছে যেখানে পরপর তিনটি পদের অনুপাত 3:4:5. (1992 AIME)

২১। 4000 থেকে 7000 এর মধ্যে কতটি সংখ্যা আছে যা্দের প্রত্যেক অংকই ভিন্ন ভিন্ন?

২২। {1, 2, 3, … … 1000} থেকে পুনস্থাপন ছাড়া তিনটি সংখ্যা তুলে নেয়া হলো। মনে করা হলো তারা a, b, c একটি ইট বানানো হলো যার আকার aXbXc এবার বাকি 997 নাম্বার থেকে আরো তিনটি সংখ্যা p, q, r তুলে নেয়া হলো। এবং pXqXr আকারের একটি বাক্স বানানো হলো m/n (যেখানে m ও n সহমৌলিক) হলো সেই সম্ভাবনা যে ইটটি বক্সের মধ্যে প্রবেশ করবে। m + n =? (1993 AIME)

২৩। বাস্তব সংখ্যার জোড়া (a, b) এর জন্য $ax + by = 1$ ও $x^2 + y^2 = 50$ এর সমাধান পূর্ণসংখ্যায় আসলে এরকম কতগুলি জোড়া বিদ্যমান? 1994 AIME

২৪। 94 টি ইটের ব্লক আছে যার আকার 4,10,19 ইঞ্চি করে। এবার ইটগুলিকে যেকোনো আঁকারে সাজানো যায়। তাহলে এ 94 টি ইট ব্যবহার করে কতগুলি একটার উপর একট রেখে কত রকমের উচ্চতা বানানো সম্ভব। 1994 AIME

২৫। একটি মাছি (0, 0) বিন্দুতে অবস্থান করছে সে এখান থেকে ডানে বামে উপরে নিচে যেতে পারে। P হলো সেই সম্ভাবনা যে 6 বা তার কম পরিমাণ মুভ দেবার পর মাছিটি (2, 2) বিন্দুতে পৌছায়। p = m/n যেখানে m ও n সহমৌলিক।। m + n এর মান কত? (1995 AIME)

২৬। একটি ত্রুটিবিহীন মুদ্রাকে টস করা হচ্ছে p হলো এমন একটি সম্ভাবনা যে পরপর 2টি টেল আসার আগেই পরপর পাঁচটি হেড উঠেছে। p = m/n যেখানে m ও n সহমৌলিক। m + n এর মান কত? (1995 AIME)

২৭। একটি 7×7 দাবা বোর্ড আছে যার মাত্র 2টি ঘর হলুদ রং করা হবে বাকি ঘরগুলি সবুজ থাকবে। প্রশ্ন হলো ঘরগুলি কতভাবে রং করা যাবে? দাবাবোর্ড 90 বা 180 বা 270 ডিগ্রি ঘুরিয়ে দিলে যে বিন্যাস আসে সেগুলিকে একটি ধরে নিতে হবে। (1996 AIME)

২৮। a, b, c,… …j এর মান 1, 2 ,…10 এর সকল বিন্যাসের জন্য |a-b|+|c-d|+|e-f|+|g-h|+|i-j| বের কর। (1997 AIME)

২৯। একটি 8×8 দাবার বোর্ডে 9টি অনুভুমিক আর 9টি উলম্ব রেখা থাকে। মনে করা যাক r হলো বোর্ডে আয়তক্ষেত্রের সংখ্যা আর s হলো বোর্ড বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা। s/r এর মান সর্বনিম্ন আঁকারে প্রকাশ করা হলো। s + r = ? (1997 AIME)

৩০। একটি কার্ডের সেটের মধ্যে তিন ধরনের আকার আছে বর্গাকার, বৃত্তাকার আর ত্রিভুজাকার। তিন ধরনের রং আছে লাল, সবুজ ও হলুদ। আর রং এর গাঢ়ত্ব আবার

তিন প্রকার হালকা, মধ্যম আর গাঢ়। মোট কার্ডের সংখ্যা 27 টি। কোনো তিনটি কার্ডের সেটকে সম্পূর্ণ বলা হবে যদি তাদের

a) তিনটার রং একই বা তিনটার রংই আলাদা হয়।
b) তিনটার আকার একই বা তিনটার আকারই আলাদা হয়।
c) তিনটার গাঢ়ত্ব একই বা তিনটার গাঢ়ত্বই আলাদা হয়।
মোট সম্পূর্ণ সেট কয়টি? (1997 AIME)

৩১। নয়টি টাইয়ের নাম্বার যথাক্রমে 1, 2, … 9। প্রত্যেক দলের তিনজন খেলোয়াড় সামনে আসেন আর তিনটি করা টাই নিয়ে যান এবং সংখ্যাগুলি যোগ করেন। p হলো সেই সম্ভাবনা যে এ প্রত্যেক দলের নাম্বারের যোগফল বিজোড় হবে। p = m/n যেখানে m ও n সহমৌলিক। m + n = ? (1998 AIME)

৩২। 40 টি দল একটি টুর্নামেন্টে অংশগ্রহণ করে। প্রত্যেক টিম অন্য টিমের সাথে ঠিক একবারই খেলে। আর প্রত্যেক টিমেরই জয়ের সম্ভাবনা 50%। কোনো টিমই সমান সংখ্যক ম্যাচ না জেতার সম্ভাবনা m/n। যেখানে m ও n সর্বনিম্ন আকারে প্রকাশ করা। কোনো ম্যাচ টাই না হলে $\log_2 n$ =? (1999 AIME)

৩৩। আমার কাছে 40 টি কার্ড আছে যাতে চারটি কার্ডে 1, চারটি কার্ডে 2,… চারটি কার্ডে 10 লেখা আছে। এখান থেকে একজোড়া একই নাম্বার যুক্ত কার্ড সরিয়ে ফেলা হলো। বাকি কার্ডগুলি থেকে একজোড়া কার্ড তুলে নেয়া হলো ।সেই কার্ড দুটির একই নাম্বার হবার সম্ভাবনা m/n. যেখানে m ও n সর্ব নিম্ন আকারে প্রকাশ করা। m + n =? (2000 AIME)

৩৪। আটটি আলাদা আলাদা আংটি থেকে চারটি আঙ্গুলে কতভাবে আংটি পড়া যায়? আঙ্গুলে আংটির বিন্যাস গুরুত্বপূর্ণ। প্রত্যেক আঙ্গুলে আংটি নাও থাকতে পারে। (2000 AIME)

৩৫। N/100 এর মান কত? (2000 AIME)

$$\frac{1}{2!17!}+\frac{1}{3!16!}+\frac{1}{4!15!}+\frac{1}{5!14!}+\frac{1}{6!13!}+\frac{1}{7!12!}+\frac{1}{8!11!}+\frac{1}{9!10!}=\frac{N}{1!18!}$$

৩৬। একটি আদর্শ ছক্কাকে চারবার রোল করা হলো। m/n হলে সেই সম্ভাবনা যে প্রত্যেক বার ছক্কায় আগেরবারের সমান বা তার বেশি সংখ্যা ছক্কায় উঠেছে। যেখানে m ও n সহমৌলিক। m + n =? (2001 AIME)

৩৭। 1, 2, …8 একটি সুষম অষ্টভুজে আকা লেখা হলে (ছক্কার মতো যেখানে 8 টি তল আছে)। m/n হলো সেই সম্ভাবনা যে পাশাপাশি কোনো ক্রমিক সংখ্যা নেই। এখানে 8 এর পর 1 আসে বলে একেও ক্রমিক ধরে নেয়া হয়েছে। এখানে m আর n সহমৌলিক হলে m + n =? (2001 AIME)

৩৮। বরিশাল জিলা স্কুলের 2001 জন ছাত্রের মধ্যে কেউ ক্রিকেট ভালো খেলে কেউ ফুটবল ভালো খেলে। ক্রিকেট ভালো খেলে এমন ছাত্র মোট ছাত্রের 80 থেকে 85 ভাগ এর মধ্যে। ক্রিকেট ভালো খেলে এমন ছাত্র মোট ছাত্রের 30 থেকে 40 ভাগ এর মধ্যে। M নির্দেশ করে সর্বোচ্চ কতজন ছাত্র উভয়ে ভালো খেলে আর m

নির্দেশ করে সর্বনিম্ন কতজন উভয় ভালো খেলে। M-m এর মান কত? (2001 AIME)
৩৯। {4, 5, 6… … n} এ সেটের যেকোনো 10টি উপাদান নিয়ে সাবসেট বানালে তার অন্তত তিনটি উপাদানের ত্রিভুজের সূত্র মেনে চলে। n এর সর্বোচ্চ মান কত? ত্রিভুজ সূত্র যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। (2001 AIME)
৪০। একটি 3×3 বর্গক্ষেত্র আছে যা হয় লাল বা নীল রং করা হয়েছে। যে কোনো রং যে কোনো গ্রীডে ব্যবহারের সম্ভাবনা সমান। m/n হলো সেই সম্ভাবনা যে ঐ 3×3 বর্গে কোনো 2×2 লাল বর্গক্ষেত্র না থাকার সম্ভাবনা। m ও n সহমৌলিক। m + n =? (2001 AIME)
৪১। একটি ফুটবল টুর্নামেন্টে বাংলাদেশ সহ আরো 6টি দল অংশ নেয়। প্রত্যেক টিম প্রত্যেকের সাথে একবার করে মোকাবেলা করে। ম্যাচে তিন ধরনের ফলাফল হতে পারে জয়, পরাজয় আর ড্র. তিনটি হবার সম্ভাবনাই সমান মানে 1/3 করে। m/n হলো সেই সম্ভাবনা যে বাংলাদেশের হারা ম্যাচের চেয়ে জয়ী ম্যাচের সংখ্যা বেশী। m + n =? (m, n সহমৌলিক) (2001 AIME)
৪২। একটি লাইসেন্স প্লেটে তিনটি ইংলিশ বর্ণ আর তিনটি অংক নিয়ে গঠিত। m/n হম সেই সম্ভাবনা যে ইংলিশ বা অংকের দুইটার কোনো একটি টামটা (palindrome) নাম্বার হবে। m ও n সহমৌলিক হলে m + n = ? (2002 AIME)
৪৩। শুভর বর্তমান বয়স 25 বছর। ইমন শুভর চেয়ে বয়সে বড়। n বছর পর দুজনের বয়সই দুই অংকের থাকে এবং শুভর বয়স ab হলে ইমনের বয়স ba হয়। ইমনের বর্তমান বয়স d হলে (d, n) এর কতটি ক্রোমজোড় আছে। (2002 AIME)
৪৪। চার অংকের কতগুলি সংখ্যা আছে যাদের সহস্র আর শতক স্থানীয় অংকের যোগফল = একক ও দশক স্থানীয় অংকের যোগফল। (2003 AIME)
৪৫। N 2003 এর ছোট বা সমান সেই সব সংখ্যা যাদের বাইনারিতে নেয়া হলে 0 এর সংখ্যার চেয়ে 1 এর সংখ্যা বেশি। N কে 1000 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (2003 AIME)
৪৬। একটি বাক্সে 10 টি লাল আর 10টি নীল মোমবাতি আছে। সেখান থেকে সবুজ 2টি মোমবাতি তুলল এরপর বাকি 18টি মোমবাতি থেকে তুরাস আরো দুইটি মোম বাতি তুলল। p হলো সেই সম্ভাবনা যে তুরাস আর সবুজের মোমবাতির রং একই হবে। p=m/n যেখানে m আর n সহমৌলিক। তাহলে m + n = ? (2004 AIME)
৪৭। 10000 এর চেয়ে ছোট কতগুলি সংখ্যা আছে যাদের সর্বোচ্চ দুইটি অংক আলাদা। (2004 AIME)
৪৮। 20042004 এর কতটি উৎপাদক আছে যাদের ঠিক 2004 টি উৎপাদক আছে। (2004 AIME)
৪৯। একটি রোবট (a, b) বিন্দুতে থাকলে পরের মুভেই (a+1,b), (a,b+1), (a+1,b+1) যেতে পারে
৫০। আর রোবটটি সরাসরি 900 ঘুড়তে পারে না। রোবটটি কতভাবে (0,0) বিন্দু থেকে (5,5) বিন্দুতে যেতে পারে। (2004 AIME)

|| প্রয়োজনীয় বই ও ওয়েবসাইট ||

1. 102 Combinatorial Problems – by । and Zuming Feng
2. Discrete Mathematics and Its Applications Hardcover – by Kenneth H. Rosen (Author)
3. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science - by Ronald L. Graham (Author), Donald E. Knuth (Author), Oren Patashnik (Author)
4. www.artofproblemsolving.com
5. উচ্চমাধ্যমিক গণিত বই
6. art and craft of problem solving

|| লেখক পরিচিতি ||

দীপু সরকার ১৯৯২ সালের ১৭ মার্চ জন্মগ্রহণ করেন। পিতা এইচ. কে. সরকার, মাতা মৃদুলা রানী সরকার, ছোট ভাই সবুজ সরকার। ২০০৭ সালে বরিশাল জিলা স্কুল থেকে এসএসসি ও ২০০৯ সালে অমৃত লাল কলেজ থেকে এইচএসসি পাস করেন। বর্তমানে তিনি বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয়ে কম্পিউটার সায়েন্স এন্ড ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগে পড়াশুনা করছেন। বরিশাল ado Science club এর, পাই জিরো টু ইনফিনিটির বিভাগীয় সম্পাদক, গণিত অলিম্পিয়াড টিমের একজন একাডেমিক টিমমেম্বার এবং অন্যকিছু ম্যাথ ও বিজ্ঞান ক্লাবের ট্রেইনার।

রাফে মোঃ আবু জায়েদ ১৯৯৫ সালের ১২ নভেম্বর বরিশাল জেলায় জন্মগ্রহণ করেন। পিতা আবুল হোসেন, মাতা সাহানারা বেগম। ২০১১ সালে বরিশাল জিলা স্কুল থেকে এসএসসি ও ২০১৩ সালে এইচএসসি পাস করেন। বর্তমানে বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয়ে যন্ত্রকৌশল বিভাগে পড়ছেন। বরিশাল Ado Science Club এর একজন ট্রেইনার।